UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Controlo robusto de ordem não inteira: síntese em frequência

Duarte Pedro Mata de Oliveira Valério
(Licenciado)

Dissertação para a obtenção do
Grau de Mestre em Engenharia Mecânica

Orientador: Doutor José Manuel Gutierrez Sá da Costa

Júri:
Presidente: Doutor José Manuel Gutierrez Sá da Costa
Vogais: Doutor Miguel Afonso Dias de Ayala Botto
Doutor José António Tenreiro Machado

Julho de 2001

Controlo robusto de ordem não inteira: síntese em frequência

Errata

Na página	Onde se lê	Devia ler-se
17	sistema de ordem 2	sistema de tipo 2
20	O máximo valor de $y(t)$,	O máximo valor em percentagem de $y(t)$,
21	controlador de ordem inteira	controlador de ordem não inteira
22, Figura 10	G_0	$20 \log_{10} G_0$
23	num intervalo de frequências que englobe	num intervalo de frequências $[\omega_i ; \omega_s]$ que englobe
23, Figura 11	C_0	$20 \log_{10} C_0$
41	a expressão geral da inclinação I, em rad,	a expressão geral da inclinação I, em rad por década,
51	controlador de fase variável	controlador de fase óptima
61	o ajuste fino	o ajuste final
75	o ajuste fino	o ajuste final
83	As acções de controlo (…) uma saída de 1V.	As acções de controlo aplicadas encontram-se na Figura seguinte.

RESUMO

A presente tese trata do projecto de controladores contínuos para controlo em anel fechado usando cálculo diferencial e integral de ordem não inteira. Esses controladores são aplicáveis a sistemas de uma entrada e uma saída, invariantes no tempo, e que sejam lineares ou tenham como única não linearidade um atraso puro.

Esses controladores conseguem desempenhos robustos; nomeadamente conseguem que o máximo valor da resposta ao degrau unitário em anel fechado seja constante e independente de variações do ganho em regime estacionário do sistema a controlar ou de variações dos seus zeros e pólos.

PALAVRAS-CHAVE

Controlo de ordem não inteira, CRONE, cálculo de ordem não inteira, controlo robusto, domínio da frequência.

Abstract

This thesis deals with the project of continuous time controllers for closed-loop control using non-integer calculus. Such controllers can be used for single-input single-output time invariant systems, which may either be linear or have as non-linearity a pure time delay.

These controllers achieve robust performances; a constant maximum value of the unit-step closed-loop response, independent of system steady state gain or pole or zero frequencies variations, is namely achieved.

Keywords

Non-integer order type control, CRONE, non-integer calculus, robust control, frequency domain.

AGRADECIMENTO

Ao Professor Heitor Pina, pelo auxílio prestado em vários métodos numéricos necessários a este trabalho.

ÍNDICE

Resumo i
Palavras-chave i
Abstract ii
Keywords ii
Agradecimento iii
Índice iv
Índice de figuras vii
Índice de tabelas xi
Resumo da notação xii
1. Introdução 1
2. Cálculo diferencial e integral de ordem não inteira 2
2.1. Cálculo diferencial e integral de ordem inteira 2
2.2. Cálculo diferencial e integral de ordem real (definição de Riemann-Liouville) 3
2.2.1. O caso da função potência 4
2.2.2. Definição formal do caso real não inteiro 5
2.2.2.1. Justificação da definição formal de integração 6
2.2.2.1.1. Justificação à custa dum integral múltiplo 6
2.2.2.1.2. Justificação à custa duma equação diferencial 7
2.2.2.2. Justificação da definição formal de diferenciação 8
2.2.3. Lei dos expoentes 8
2.3. Cálculo diferencial e integral de ordem complexa (definição de Riemann-Liouville) 9
2.4. Cálculo diferencial e integral de ordem real (definição de Grünwald-Letnikoff) 9
2.5. Equações diferenciais 11
2.5.1. Transformada de Laplace 11
2.5.2. Resolução de equações 11
2.5.3. Diagramas de Bode e de Nichols 12
2.5.3.1. Caso real 12
2.5.3.2. Caso complexo 13
3. Controlo de ordem não inteira 16
3.1. Derivada de ordem real não inteira 16
3.1.1. Anel aberto 16
3.1.2. Anel fechado 17
3.1.2.1. Resposta em frequência 17
3.1.2.2. Resposta no tempo 20
3.1.3. Determinação dos parâmetros dum controlador 21
3.1.3.1. Fase do controlador 21
3.1.3.2. O controlador real e os erros estacionários 21
3.1.3.3. Controlador de fase constante 23
3.1.3.3.1. Determinação da função de transferência 23
3.1.3.3.2. Aproximação da função de transferência 25
3.1.3.4. Controlador de fase variável 27
3.1.3.4.1. Determinação da função de transferência 27
3.1.3.4.2. Pré-controlo do sistema a controlar 29

3.1.3.5. Sensibilidade ao ruído 30
3.2. Derivada de ordem complexa 33
3.2.1. Anel aberto 33
3.2.2. Anel fechado 38
3.2.3. Determinação dos parâmetros dum controlador 39
3.2.3.1. Fase do controlador 39
3.2.3.2. Controlador de fase logarítmica com pólos e zeros reais 40
3.2.3.3. Controlador de fase logarítmica com uma derivação complexa 40
3.3. Implementação discreta dum controlador de ordem não inteira 42
4. A caixa de ferramentas *ninteiro* 43
4.1. Características 43
4.2. Exemplo de utilização 44
4.2.1. Identificação do sistema 44
4.2.2. Controlador de fase constante 47
4.2.3. Controlador de fase variável 48
4.2.4. Controlador de fase óptima 50
5. Desempenho dos controladores de ordem não inteira 55
5.1. Problema paradigmático de controlo 55
5.1.1. Modelação do sistema 56
5.1.2. Identificação do sistema 58
5.1.3. Especificações de desempenho 60
5.1.4. Controlo da posição 60
5.1.4.1. Desenvolvimento dos controladores 60
5.1.4.2. Seguimento de um degrau e rejeição de perturbações 61
5.1.4.3. Função de sensibilidade da saída 65
5.1.4.4. Função de sensibilidade da entrada 66
5.1.4.5. Conclusões 66
5.2. Sistema laboratorial 67
5.2.1. Modelação do sistema 68
5.2.2. Identificação do sistema 69
5.2.3. Especificações de desempenho 74
5.2.4. Controlo de velocidade 74
5.2.4.1. Desenvolvimento dos controladores 74
5.2.4.2. Seguimento de um degrau e rejeição de perturbações 75
5.2.4.3. Seguimento de uma sinusóide 76
5.2.4.4. Robustez a alterações no sistema 77
5.2.5. Controlo de posição 79
5.2.5.1. Desenvolvimento dos controladores 79
5.2.5.2. Seguimento de um degrau e rejeição de perturbações 80
5.2.5.3. Seguimento de uma sinusóide 82
5.2.5.4. Robustez a alterações no sistema 83
6. Conclusões e trabalho futuro 88
6.1. Conclusões 88
6.2. Trabalho futuro 89
Bibliografia 90
Apêndice A. Propriedades dalgumas funções transcendentais 92
A.1. A função Γ 92
A.2. A função γ^* 93
A.3. A função E_t 93
Apêndice B. Exemplo dum fenómeno físico 95

B.1. Modelação 95
B.2. Diagrama de Bode 96
B.3. Resultado final 97
Apêndice C. Lista dos ficheiros da caixa de ferramentas 99
C.1. Ficheiros da interface gráfica 99
C.2. Funções fundamentais 99

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 — Diagrama de Bode (à esquerda) e diagrama de Nichols (à direita) de $F(s)=s^v$, $v>0$ 12
Figura 2 — Diagrama de Bode (à esquerda) e diagrama de Nichols (à direita) de $F(s)=s^v$, $v<0$ 13
Figura 3 — Diagrama de Bode (à esquerda) e diagrama de Nichols (à direita) de $F(s)=\mathrm{Re}(s^{a+jb})$, $a>0$ 13
Figura 4 — Diagrama de Bode (à esquerda) e diagrama de Nichols (à direita) de $F(s)=\mathrm{Re}(s^{a+jb})$, $a<0$ 14
Figura 5 — Diagrama de Bode de $F(s)=\mathrm{Im}(s^{a+jb})$, $a>0$ 14
Figura 6 — Diagrama de Bode de $F(s)=\mathrm{Im}(s^{a+jb})$, $a<0$ 14
Figura 7 — Diagrama de Bode de $G(s)$ 17
Figura 8 — Anel de realimentação 17
Figura 9 — Anel de controlo 21
Figura 10 — Diagrama de Bode real 22
Figura 11 — Diagrama de Bode do controlador 23
Figura 12 — Diagrama de Bode do controlador a implementar (a vermelho), e sua aproximação assimptótica (a azul) 25
Figura 13 — Exemplo ilustrativo do objectivo dum controlador de fase variável; a verde, fase do sistema a controlar S; a vermelho, fase pretendida para o anel aberto; a azul, fase que o controlador deve ter a várias frequências 28
Figura 14 — Pré-controlo do sistema 29
Figura 15 — Anel com ruído 31
Figura 16 — Anel com pré-controlo e ruído 32
Figura 17 — Anel equivalente ao anterior 32
Figura 18 — Curvas de nível das funções de ganho do anel fechado (à esquerda) e de coeficiente de amortecimento do anel fechado (à direita) no plano de Nichols; as cotas encontram-se abaixo ou à direita da curva respectiva 35
Figura 19 — Exemplo ilustrativo do objectivo dum controlador óptimo; as curvas de nível do ganho do anel fechado estão traçadas para todos os valores entre −15 dB e 7 dB 36
Figura 20 — Anel de realimentação 38
Figura 21 — Anel de controlo 39
Figura 22 — Diagrama de Bode do sistema em estudo 44
Figura 23 — Diálogo inicial 45
Figura 24 — Preenchimento do primeiro diálogo de identificação dum sistema 45
Figura 25 — Sistema identificado 46
Figura 26 — Diálogo para a escolha dum controlador 47
Figura 27 — Dados para o cálculo dum controlador de fase constante 47
Figura 28 — Anel aberto com um controlador de fase constante 48
Figura 29 — Alteração do intervalo de frequências de interesse 48
Figura 30 — Selecção das frequências de amostragem da fase para um controlador de fase variável 49
Figura 31 — Anel aberto com um controlador de fase variável 49
Figura 32 — Pré-controlo do sistema 50
Figura 33 — Novo sistema a controlar 50
Figura 34 — Determinação da inclinação óptima 51

Figura 35 — Selecção das frequências de amostragem da fase para um controlador de fase variável óptima.....51
Figura 36 — Anel aberto com um controlador de fase variável óptima 52
Figura 37 — Selecção das frequências de amostragem da fase para um controlador de fase constante e variável óptima.....53
Figura 38 — Anel aberto com um controlador de fase constante e variável óptima 53
Figura 39 — Dados para o cálculo dum controlador de fase logarítmica 54
Figura 40 — Anel aberto com um controlador de fase logarítmica óptima.....54
Figura 41 — Sistema a controlar (adaptada de Landau *et al.* 1995) 55
Figura 42 — Diagramas de Bode do sistema a controlar: a azul, sistema sem carga; a verde, sistema a carga média; a vermelho, sistema a plena carga 59
Figura 43 — Saída do sistema (a azul), controlado com o PID projectado para o sistema sem carga, aquando do seguimento de um degrau (a verde), tendo sido aplicada uma perturbação (a vermelho): à esquerda, sistema sem carga; à direita, sistema a média carga; ao fundo, sistema a plena carga 62
Figura 44 — Saída do sistema (a azul), controlado com o PID projectado para o sistema a média carga, aquando do seguimento de um degrau (a verde), tendo sido aplicada uma perturbação (a vermelho): à esquerda, sistema sem carga; à direita, sistema a média carga; ao fundo, sistema a plena carga 62
Figura 45 — Saída do sistema (a azul), controlado com o PID projectado para o sistema a plena carga, aquando do seguimento de um degrau (a verde), tendo sido aplicada uma perturbação (a vermelho): à esquerda, sistema sem carga; à direita, sistema a média carga; ao fundo, sistema a plena carga 63
Figura 46 — Saída do sistema (a azul), controlado com o controlador de ordem não inteira, aquando do seguimento de um degrau (a verde), tendo sido aplicada uma perturbação (a vermelho): à esquerda, sistema sem carga; à direita, sistema a média carga; ao fundo, sistema a plena carga 64
Figura 47 — Acções de controlo correspondentes à figura anterior.....65
Figura 48 — Função de sensibilidade da saída para o anel aberto formado pelo sistema a controlar e pelo controlador de ordem não inteira; a azul, sistema sem carga; a verde, sistema a média carga; a vermelho, sistema a plena carga; o valor superior do eixo dos ganhos é de 6 dB 66
Figura 49 — Função de sensibilidade da entrada para o anel aberto formado pelo sistema a controlar e pelo controlador de ordem não inteira; a azul, sistema sem carga; a verde, sistema a média carga; a vermelho, sistema a plena carga 66
Figura 50 — Sistema laboratorial a controlar (adaptada de Landau *et al.* 1995).....68
Figura 51 — À esquerda o sistema laboratorial a controlar, sendo visíveis o computador e a placa de comunicação; à direita, o interior do sistema laboratorial a controlar, sendo visíveis as massas fixas à terceira roldana.....68
Figura 52 — Diagrama de Bode experimental do sistema a controlar (a azul: curva com sinusóides de entrada de amplitude 6 V; a verde: curva com sinusóides de entrada de amplitude 8V) e diagrama de Bode do modelo ajustado à curva de ganho S_1 (a vermelho).....70
Figura 53 — Diagrama de Bode experimental do sistema a controlar (a azul: curva com sinusóides de entrada de amplitude 6 V; a verde: curva com sinusóides de entrada de amplitude 8V) e diagrama de Bode do modelo ajustado à curva de fase S_3 (a vermelho).....71
Figura 54 — Resposta a um degrau unitário do modelo identificado (a azul), resposta experimental a um degrau de 6 V, adimensionalizada (a verde), e resposta experimental a um degrau de 8 V, adimensionalizada (a vermelho).....71

Figura 55 — Diagrama de Bode experimental do sistema a controlar (a azul: curva com sinusóides de entrada de amplitude 6 V; a verde: curva com sinusóides de entrada de amplitude 8V) e diagrama de Bode do modelo obtido a partir da resposta a degraus S_5 (a vermelho) 72
Figura 56 —Resposta experimental a um degrau de 6 V, adimensionalizada (a azul), resposta experimental a um degrau de 8 V, adimensionalizada (a verde), resposta a um degrau unitário do modelo ajustado à curva de ganho S_1 (a vermelho), e resposta a um degrau unitário do modelo ajustado à curva de fase S_3 (a cor de rosa) 73
Figura 57 — Resposta experimental do sistema, modificado pela aplicação de duas massas na terceira roldana, a uma entrada sinusoidal de frequência 0,1 rad/s e amplitude 8 V 74
Figura 58 — Saída do sistema (a azul) aquando do seguimento de um degrau (a verde): à esquerda, resultado obtido com o PID; à direita, resultado obtido com o controlador de ordem não inteira; foi aplicada uma perturbação constante da Figura seguinte 75
Figura 59 — Acções de controlo (a azul) e perturbações (a verde) correspondentes à figura anterior 76
Figura 60 — Saída do sistema (a azul) aquando do seguimento de uma sinusóide (a verde): à esquerda, resultado obtido com o PID; à direita, resultado obtido com o controlador de ordem não inteira 76
Figura 61 — Acções de controlo correspondentes à figura anterior 77
Figura 62 — Saída do sistema modificado (a azul) aquando do seguimento de um degrau (a verde): à esquerda, resultado obtido com o PID; à direita, resultado obtido com o controlador de ordem não inteira; foi aplicada uma perturbação constante da figura seguinte 77
Figura 63 — Acções de controlo (a azul) e perturbações (a verde) correspondentes à figura anterior 77
Figura 64 — Saída do sistema nominal (a azul) aquando do seguimento de um degrau (a verde): à esquerda, resultado obtido com o PID; à direita, resultado obtido com o controlador de ordem não inteira 78
Figura 65 — Saída do sistema modificado (a azul) aquando do seguimento de um degrau (a verde): à esquerda, resultado obtido com o PID; à direita, resultado obtido com o controlador de ordem não inteira 78
Figura 66 — Acções de controlo correspondentes à Figura 64 78
Figura 67 — Acções de controlo correspondentes à Figura 65 79
Figura 68 — Saída do sistema (a azul) aquando do seguimento de um degrau (a verde): à esquerda, resultado obtido com o PID; à direita, resultado obtido com o controlador de ordem não inteira; foi aplicada uma perturbação constante da figura seguinte 81
Figura 69 — Acções de controlo (a azul) e perturbações (a verde) correspondentes à figura anterior 81
Figura 70 —Saída do sistema (a azul) aquando do seguimento de um degrau (a verde): à esquerda, resultado obtido com o PID; à direita, resultado obtido com o controlador de ordem não inteira 82
Figura 71 — Acções de controlo correspondentes à figura anterior 82
Figura 72 — Saída do sistema (a azul) aquando do seguimento de uma sinusóide (a verde): à esquerda, resultado obtido com o PID; à direita, resultado obtido com o controlador de ordem não inteira 83
Figura 73 — Acções de controlo correspondentes à figura anterior 83

Figura 74 — Saída do sistema nominal (a azul) aquando do seguimento de uma rampa (a verde): à esquerda, resultado obtido com o PID; à direita, resultado obtido com o controlador de ordem não inteira....84
Figura 75 — Saída do sistema modificado (a azul) aquando do seguimento de uma rampa (a verde): à esquerda, resultado obtido com o PID; à direita, resultado obtido com o controlador de ordem não inteira....84
Figura 76 — Acções de controlo correspondentes à Figura 64 84
Figura 77 — Acções de controlo correspondentes à Figura 65 85
Figura 78 — Variações entre as respostas da Figura 74 e da Figura 75 85
Figura 79 — Saída do sistema (a azul) aquando do seguimento de uma rampa (a verde), comutando entre o controlador de ordem não inteira e o controlador PID: à esquerda, resultado obtido com o sistema nominal; à direita, resultado obtido com o sistema modificado....86
Figura 80 — Acções de controlo correspondentes à Figura 79 86
Figura 81 — Saída do sistema (a azul) aquando do seguimento de uma rampa (a verde), com o controlador de ordem não inteira adicionado de um termo integrativo: à esquerda, resultado obtido com o sistema nominal; à direita, resultado obtido com o sistema modificado....87
Figura 82 — Acções de controlo correspondentes à Figura 81 87
Figura 83 — Dique....95
Figura 84 — Alvéolo na parede do dique 95
Figura 85 — Modelo eléctrico do alvéolo....95
Figura 86 — Diagrama de Bode da função de transferência de Q/P havendo dois alvéolos....96
Figura 87 — Diagrama de Bode da função de transferência de Q/P havendo um número infinito de alvéolos 97
Figura 88 — Diagrama de blocos equivalente ao modelo do dique 98

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 — Valores de p na expressão (5.29) 60
Tabela 2 — Grandezas correspondentes às respostas da Figura 46 65
Tabela 3 — Erros cometidos face aos dados experimentais pelos modelos S_1, S_3 e S_5 .. 73
Tabela 4 — Grandezas correspondentes às respostas da Figura 58 76
Tabela 5 — Grandezas correspondentes às respostas da Figura 68 81

RESUMO DA NOTAÇÃO

Apenas se apresenta aqui a notação mais frequentemente utilizada. Outros símbolos e variáveis foram empregues, cuja definição deve procurar-se no texto.

${}_cD_x^v y(x)$	derivada de ordem *v* da função $y(x)$, sendo *c* o limite inferior de integração e *x* o limite superior de integração (vejam-se as subsecções 2.2.2, 2.3 e 2.4)
$e(s)$	erro do controlo, isto é, $r(s)-y(s)$
$F(s)$	função de transferência em anel fechado
$G(s)$	função de transferência em anel aberto
j	unidade imaginária
$\mathscr{L}[f(x)]=F(s)$	transformada de Laplace da função $f(x)$
$\log x$	logaritmo neperiano de *x*
$\log_{10} x$	logaritmo decimal de *x*
$r(s)$	referência para o controlo
$u(s)$	acção de controlo
$y(s)$	saída do sistema a controlar
$\Gamma(x)$	função gama (veja-se o apêndice A.1)
ζ	coeficiente de amortecimento
ω_0	frequência de cruzamento de ganho
ω_{am}	frequência amortecida
$[\omega_a;\omega_b]$	intervalo de frequências de interesse para o controlo
$[\omega_i;\omega_s]$	intervalo de frequências em que um controlador de fase constante tem a fase efectivamente constante
ω_p	frequência dum pólo
ω_R	frequência de ressonância
ω_z	frequência dum zero

1. INTRODUÇÃO

A teoria do cálculo diferencial e integral de ordem não inteira foi desenvolvida para generalizar as noções de derivada e de integral indefinido à situação em que a ordem de diferenciação ou de integração é um número real ou complexo qualquer[1]. Essa teoria tem várias aplicações, uma das quais na modelação e controlo de sistemas dinâmicos[2].

A presente tese trata do projecto de controladores contínuos para controlo em anel fechado usando cálculo diferencial e integral de ordem não inteira[3]. Esses controladores são aplicáveis a sistemas de uma entrada e uma saída, invariantes no tempo, e que sejam lineares ou tenham como única não linearidade um atraso puro.

Esses controladores conseguem desempenhos robustos; nomeadamente conseguem que o máximo valor da resposta ao degrau unitário em anel fechado seja constante e independente de variações do ganho em regime estacionário do sistema a controlar ou de variações dos seus zeros e pólos.

Os objectivos desta tese são:

❖ resumir o estado da arte dos algoritmos conhecidos de síntese de controladores no domínio da frequência;

❖ implementar esses algoritmos para *Matlab*, numa caixa de ferramentas, permitindo o cálculo de controladores de forma fácil e sistemática;

❖ comparar os resultados obtidos com controladores de ordem não inteira com os resultados obtidos com controladores clássicos, quer em simulação quer em implementação laboratorial, averiguando em que situações serão de aplicar uns ou outros.

A limitação do âmbito aos algoritmos de síntese em frequência deveu-se a condicionamentos de tempo.

No capítulo 2 desta tese expõem-se os fundamentos do cálculo diferencial e integral de ordem não inteira que são necessários ao projecto deste tipo de controladores.

No capítulo 3 expõe-se os algoritmos de projecto dos controladores no domínio da frequência. São contemplados três casos, correspondendo a diferentes características do sistema a controlar.

No capítulo 4 apresenta-se de forma resumida uma caixa de ferramentas para *Matlab*, desenvolvida no âmbito desta tese, que projecta controladores de acordo com esta metodologia.

No capítulo 5 apresentam-se resultados de desempenho dos controladores projectados com a caixa de ferramentas apresentadas no capítulo 4.

No capítulo 6 tiram-se conclusões e perspectiva-se o trabalho futuro.

---

[1] Apesar de alguns esforços no sentido dessa generalização terem sido levados a cabo ainda no final do século XVII, quando se estabeleceu a teoria do cálculo diferencial, foi só no século XIX que surgiu uma teoria completa e coerente do cálculo diferencial e integral de ordem não inteira. Não tem para aqui interesse a história do desenvolvimento deste ramo do Cálculo, que se pode achar resumida em Miller *et al.* (1993), pp. 1-16, e em Samko *et al.* (1993), pp. xvii-xxxvi.

[2] Tratam deste assunto as referências Barbosa (1999), Machado (1997), Machado *et al.* (1998), Machado (1999), Oustaloup (1991), Oustaloup *et al.* (1995), Podlubny (1999), pp. 243-260, e Tunes (1997).

[3] Este tipo de controlo é comummente designado por CRONE, acrónimo da designação francesa *commande robuste d'ordre non entier*.

2. CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL DE ORDEM NÃO INTEIRA

Este capítulo resume o essencial da teoria do cálculo diferencial e integral de ordem não inteira[4]. Compreende cinco secções: na primeira define-se o operador de diferenciação e integração para uma ordem inteira; na segunda generaliza-se esse operador para uma ordem real não inteira segundo a definição de Riemann-Liouville; na terceira generaliza-se esse operador para uma ordem complexa qualquer segundo a definição de Riemann-Liouville; na quarta generaliza-se esse operador para uma ordem real não inteira segundo a definição de Grünwald-Letnikoff; e na quinta resume-se a teoria das equações diferenciais em que surgem ordens de diferenciação não inteiras.

2.1. CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL DE ORDEM INTEIRA

A noção de derivada, para uma ordem de derivação natural, está bem estabelecida. É fácil, portanto, definir um operador funcional D^n tal que

$$D^n y(x) = \frac{d^n y(x)}{dx^n} \tag{2.1}$$

A noção de integral indefinido, para uma ordem de integração natural, está igualmente bem estabelecida. Pode-se, portanto, definir também um operador funcional ${}_cI_x^n$ tal que

$${}_cI_x^n y(x) = \begin{cases} \int_c^x y(x)dx, & se\ n = 1 \\ \int_c^x {}_cI_x^{n-1} y(x)dx, & se\ n > 1 \end{cases} \tag{2.2}$$

É possível que a variável x seja o limite inferior de integração, caso em que o operador será ${}_xI_c^n$.

Conforme se sabe, a integração indefinida e a derivação são operações inversas no sentido em que

$$D^n\ {}_cI_x^n y(x) = y(x) \tag{2.3}$$

Pode portanto definir-se

$${}_cI_x^n y(x) = {}_cD_x^{-n} y(x) \tag{2.4}$$

[4] Sobre este assunto vejam-se Gorenflo *et al.* (1997), Miller *et al.* (1993), Podlubny (1999) e Samko *et al.* (1993). As referências desta secção serão feitas principalmente sobre a segunda e a quarta destas obras. Barbosa (1999), pp. 21-35, e Tunes (1997), pp. 11-23, também apresentam resumos que cobrem aproximadamente os mesmos assuntos.

Para completar a definição do operador D^n para todo o n inteiro resta convencionar que

$$D^0 y(x) = y(x) \tag{2.5}$$

Esta definição convém devido à lei dos expoentes, já a seguir exposta.

Repare-se que a ordem em que se aplicam os dois operadores não é irrelevante[5], pois

$$ {}_c I_x^1 D^1 y(x) = y(x) - y(c) = y(x) - (x-c)^0 y(c) \tag{2.6}$$

$$ {}_c I_x^2 D^2 y(x) = y(x) - y(c) - (x-c)Dy(c) = y(x) - (x-c)Dy(c) - (x-c)^0 y(c) \tag{2.7}$$

$$ {}_c I_x^3 D^3 y(x) = y(x) - y(c) - \frac{(x-c)^2}{2} D^2 y(c) - (x-c) Dy(c) =$$

$$= y(x) - \frac{(x-c)^2}{2} D^2 y(c) - (x-c) Dy(c) - (x-c)^0 y(c) \tag{2.8}$$

…

$$ {}_c I_x^n D^n y(x) = y(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-c)^i}{i!} D^i y(c) \tag{2.9}$$

A lei dos expoentes do operador D^n resulta do que atrás se expôs e afirma que

$$D^n D^m y(x) = D^{n+m} y(x), \ m \in \mathbb{Z}_0^- \vee n, m \in \mathbb{N}_0 \tag{2.10}$$

Pelo que atrás se viu, tem-se também

$$D^n D^m y(x) = D^{n+m} y(x) - \sum_{i=n+m}^{m-1} \frac{(x-c)^i}{i!} D^i y(c), \ m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}^- \tag{2.11}$$

Nas secções seguintes mostra-se como é possível generalizar este operador D^n para o caso em que a ordem de diferenciação ou integração é um número complexo qualquer. Há várias definições alternativas que se podem adoptar, e que não são sempre equivalentes. A definição de Riemann-Liouville, que é a mais comum, é apresentada na secção 2.2 para o caso real e na secção 2.3 para o caso complexo. Na secção 2.4 é apresentada a definição de Grünwald-Letnikoff para o caso real.

2.2. CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL DE ORDEM REAL (DEFINIÇÃO DE RIEMANN-LIOUVILLE)

Nesta secção apresenta-se a generalização do operador de diferenciação para o caso em que a ordem é um real qualquer. Usa-se a definição de Riemann-Liouville, que é a mais comummente empregue. Na subsecção 2.2.1 apresenta-se um dos casos em que

[5] Samko *et al.* (1993), p. 43.

essa generalização é mais fácil. Na subsecção 2.2.2 apresenta-se a definição formal. Na subsecção 2.2.3 generaliza-se a lei dos expoentes.

2.2.1. O CASO DA FUNÇÃO POTÊNCIA

Seja

$$y(x) = x^a \tag{2.12}$$

com $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Tem-se

$$y'(x) = ax^{a-1} \tag{2.13}$$
$$y''(x) = a(a-1)x^{a-2} \tag{2.14}$$
$$y'''(x) = a(a-1)(a-2)x^{a-3} \tag{2.15}$$

desde que, claro, não se chegue à situação em que o expoente é nulo, a partir da qual as derivadas serão sempre nulas. A expressão geral é

$$y^{(n)}(x) = a(a-1)\ldots[a-(n-1)]x^{a-n} = \frac{a!}{(a-n)!}x^{a-n} \tag{2.16}$$

como se demonstra facilmente por indução:

$$y^{(n+1)}(x) = \left[\frac{a!}{(a-n)!}x^{a-n}\right]' = \frac{a!}{(a-n)\left[a-(n+1)\right]\ldots 2\times 1}(a-n)x^{a-n-1} =$$
$$= \frac{a!}{\left[a-(n+1)\right]!}x^{a-(n+1)} \tag{2.17}$$

Esta expressão é igualmente válida para a integração, quando o limite inferior de integração *c* é 0:

$$\int_0^x y(\xi)d\xi \equiv \int y(x)dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} \tag{2.18}$$
$$\iint y(x)dxdx = \frac{1}{(a+1)(a+2)}x^{a+2} \tag{2.19}$$
$$\iiint y(x)dxdxdx = \frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)}x^{a+3} \tag{2.20}$$

desde que não se chegue a um caso em que o expoente seja -1 (recorde-se que $\int x^{-1}dx = \ln x$). O caso geral demonstra-se uma vez mais por indução:

$$\int\left[D^{-n}y(x)\right]dx = D^{-(n+1)}y(x) = \int\left[\frac{a!}{(a+n)!}x^{a+n}\right]dx =$$

$$= \int \left[\frac{1}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)} x^{a+n} \right] dx = \frac{1}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)(a+n+1)} x^{a+n+1} =$$

$$= \frac{a!}{(a+n+1)!} x^{a+n+1} \tag{2.21}$$

Pode-se portanto escrever[6]

$${}_0D_x^n y(x) = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n+1)} x^{a-n} \tag{2.22}$$

Ora, esta expressão é válida mesmo que a ordem de diferenciação não seja inteira. Em consequência, é razoável escrever[7]

$${}_0D_x^v y(x) = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-v+1)} x^{a-v}, \ v \in \mathbb{R} \tag{2.23}$$

desde que, como atrás se referiu, $\sim\left(a \in \mathbb{N} \wedge a - v \in \mathbb{Z}^-\right) \wedge \sim\left(a \in \mathbb{Z}^- \wedge a - v \in \mathbb{N}^0\right)$[8].

2.2.2. DEFINIÇÃO FORMAL DO CASO REAL NÃO INTEIRO

Seja $f(x)$ uma função contínua por troços e integrável. Então define-se

$${}_cD_x^v f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-v)} \int_c^x (x-\xi)^{-v-1} f(\xi) d\xi, \ se \ \ v < 0 \\ f(x), \ se \ \ v = 0 \\ {}_cD_x^n \left[{}_cD_x^{v-n} f(x) \right], \ n = \min\{k \in \mathbb{N} : k > v\}, \ se \ \ v > 0 \end{cases} \tag{2.24}$$

Se *x* for o limite inferior de integração, ter-se-á

$${}_xD_c^v f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-v)} \int_x^c (\xi-x)^{-v-1} f(\xi) d\xi, \ se \ \ v < 0 \\ f(x), \ se \ \ v = 0 \\ (-1)^n \ {}_cD_x^n \left[{}_cD_x^{v-n} f(x) \right], \ n = \min\{k \in \mathbb{N} : k > v\}, \ se \ \ v > 0 \end{cases} \tag{2.25}$$

[6] A função Γ e outras funções transcendentes desempenham um papel importante na generalização do cálculo integral e diferencial a ordens não inteiras. No apêndice A pode achar-se um resumo das suas propriedades mais importantes.

[7] Miller *et al.* (1993), pp. 2-3.

[8] Aliás, na primeira dessas situações o denominador da fracção não está definido; mas, embora não esteja definido, tende para ∞, e portanto a expressão tende para 0, que é o valor correcto da derivada.

Este operador ${}_cD_x^v$ é conhecido por operador de Riemann[9]; se $c=-\infty$ é conhecido por operador de Liouville; se $c=0$ é conhecido por operador de Riemann-Liouville; se os limites de integração forem x e $+\infty$ é conhecido por transformada de Weil e representa-se por ${}_xW_{+\infty}^v$.

Esta definição, como qualquer definição, é arbitrária; mas justifica-se por ser uma generalização do caso em que a ordem de diferenciação ou integração é inteira. É necessário justificar separadamente os casos da diferenciação e da integração.

2.2.2.1. JUSTIFICAÇÃO DA DEFINIÇÃO FORMAL DE INTEGRAÇÃO

É conveniente começar por justificar a definição formal de integração, visto que é à custa dela que a diferenciação é definida. Pode-se fazê-lo de dois modos diferentes.

2.2.2.1.1. Justificação à custa dum integral múltiplo

Considere-se, para n natural, a igualdade

$${}_cD_x^{-n}f(x)=\int_c^x\int_c^{x_1}\int_c^{x_2}\dots\int_c^{x_{n-1}}f(t)dt\dots dx_3dx_2dx_1 \tag{2.26}$$

Ora, pelo teorema de Fubini sabe-se que[10]

$$\int_c^x\int_c^{x_1}G(x_1,t)dtdx_1=\int_c^x\int_t^{x}G(x_1,t)dx_1dt \tag{2.27}$$

Em particular, se G só for função de t,

$$\int_c^x\int_c^{x_1}f(t)dtdx_1=\int_c^x\int_t^{x}f(t)dx_1dt=\int_c^x f(t)\int_t^{x}dx_1dt=\int_c^x f(t)(x-t)dt \tag{2.28}$$

Aplicando novamente a mesma propriedade[11], conclui-se que

$$\int_c^x\int_c^{x_1}\int_c^{x_2}f(t)dtdx_2dx_1=\int_c^x\int_c^{x_1}(x_1-t)f(t)dtdx_1=\int_c^x\int_t^{x}(x_1-t)f(t)dx_1dt=$$

---

[9] Segue-se aqui a notação de Miller *et al.* (1993), pp. 21 e 36. Samko *et al.* (1993), pp. 33 e 37, usa a seguinte notação, com $n>0$:

$${}_cD_x^nf(x)=\left(D_{c+}^nf\right)(x)$$
$${}_xD_c^nf(x)=\left(D_{c-}^nf\right)(x)$$
$${}_cD_x^{-n}f(x)=\left(D_{c+}^{-n}f\right)(x)=\left(I_{c+}^nf\right)(x)$$
$${}_xD_c^{-n}f(x)=\left(D_{c-}^{-n}f\right)(x)=\left(I_{c-}^nf\right)(x)$$

Em Miller *et al.* (1993), pp. 352 e ss., e em Samko *et al.* (1993), pp. 173-174, encontram-se tabelas de derivadas e integrais de várias funções, usando o operador de Riemann.

[10] Magalhães (1993), pp. 6 e ss..

[11] Repare-se que, se x for o limite inferior de integração, o polinómio que multiplica $f(t)$ não será $(x-t)$ mas sim $(t-x)$. O sinal de menos que afecta x justifica a diferente definição do operador de Riemann para esse caso.

$$= \int_c^x f(t) \int_t^x (x_1 - t) dx_1 dt = \int_c^x f(t) \frac{(x-t)^2}{2} dt \tag{2.29}$$

A expressão geral, que se demonstra por indução, e é conhecida por fórmula de Cauchy, é

$${}_c D_x^{-n} f(x) = \int_c^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_c^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \tag{2.30}$$

Ora esta expressão é válida mesmo que a ordem de integração não seja natural, pelo que se pode escrever[12]

$${}_c D_x^{v} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-v)} \int_c^x (x-t)^{-v-1} f(t)\, dt, \;\; v \in \mathbb{R}^- \tag{2.31}$$

2.2.2.1.2. Justificação à custa duma equação diferencial

Considere-se o sistema diferencial linear, para *n* natural,

$$\begin{cases} D^n y(x) = f(x) \\ D^k y(0) = 0, \quad 0 \le k < n \end{cases} \tag{2.32}$$

Este sistema pode resolver-se por meio da transformada de Laplace[13], e é equivalente a

$$s^n Y(s) = F(s) \Leftrightarrow Y(s) = s^{-n} F(s) \tag{2.33}$$

Ora, pelo teorema da convolução,

$$\mathscr{L}\left[\int_0^x f_1(x-t) f_2(t)\, dt \right] = F_1(s) F_2(s) \tag{2.34}$$

e como

$$\mathscr{L}^{-1}\left[s^{-n} \right] = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \tag{2.35}$$

vem

$$y(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \tag{2.36}$$

---

[12] Miller *et al.* (1993), pp. 23-25; Samko *et al.* (1993), p. 33.

[13] Sobre a transformada de Laplace e o método nela baseado para a resolução de equações diferenciais, veja-se Ogata (1997), pp. 17-46.

Visto que $f(x)$ é a *n*-ésima derivada de $y(x)$, conclui-se que $y(x)$ é o *n*-ésimo integral indefinido de $f(x)$. Logo[14]

$$ {}_0D_x^{-n} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \tag{2.37} $$

Ora esta expressão é válida mesmo que *n* não seja inteiro. Pode-se portanto escrever, admitindo agora limites inferiores de integração diferentes de 0,

$$ {}_cD_x^v f(x) = \frac{1}{\Gamma(-v)} \int_c^x (x-t)^{-v-1} f(t) dt, \ v \in \mathbb{R}^- \tag{2.38} $$

2.2.2.2. JUSTIFICAÇÃO DA DEFINIÇÃO FORMAL DE DIFERENCIAÇÃO

Se o operador D^n continuar a respeitar a lei dos expoentes, que se verifica quando estes são inteiros, a razão de ser da definição é óbvia. A subsecção seguinte trata dessa lei com mais pormenor.

2.2.3. LEI DOS EXPOENTES

Tal como sucede quando as ordens de integração são inteiras,

$$ {}_cD_x^v \, {}_cD_x^{-v} f(x) = f(x), \quad v \geq 0 \tag{2.39} $$

mas uma vez mais se a ordem dos operadores for trocada a igualdade já não se verifica[15]:

$$ \begin{aligned} &{}_cD_x^{-v} \, {}_cD_x^v f(x) = \\ &= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-c)^{v-k-1}}{\Gamma(v-k)} D^{n-k-1} \, {}_cD_x^{v-n} f(c), \ n = \min\{m \in \mathbb{N} : m > v\} \end{aligned} \tag{2.40} $$

Assim, ter-se-á:

$$ {}_cD_x^u \, {}_cD_x^v f(x) = {}_cD_x^{u+v} f(x), \quad se \ v < 0 \wedge u + v < 0 \tag{2.41} $$

$$ \begin{aligned} &{}_cD_x^u \, {}_cD_x^v f(x) = {}_cD_x^{u+v} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-c)^{-u-k-1}}{\Gamma(-u-k)} D^{n-k-1} \, {}_cD_x^{v-n} f(c), \\ &n = \min\{m \in \mathbb{N} : m > v\}, \ se \ \ v > 0 \wedge u < 0 \end{aligned} \tag{2.42} $$

[14] Miller *et al.* (1993), pp. 25 e 28.
[15] Miller *et al.* (1993), pp. 57 a 63; Samko *et al.* (1993), pp. 44-48.

2.3. CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL DE ORDEM COMPLEXA (DEFINIÇÃO DE RIEMANN-LIOUVILLE)

É possível generalizar o operador D^v para contemplar uma ordem complexa[16]. É necessário ter em conta que

$$\begin{aligned} k^{a+jb} &= e^{\log\left(k^{a+jb}\right)} = e^{(a+jb)\log k} = e^{a\log k + jb\log k} = e^{\log k^a + jb\log k} = \\ &= e^{\log k^a} e^{jb\log k} = k^a \operatorname{cis}(b\log k) \end{aligned} \tag{2.43}$$

onde

$$\operatorname{cis} x = \cos x + j\sin x \tag{2.44}$$

Deste modo, a função Γ continua definida e basta adaptar ligeiramente a definição (2.24):

$${}_cD_x^z f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(-z)}\displaystyle\int_c^x (x-\xi)^{-z-1} f(\xi)\,d\xi, \ se \ \operatorname{Re} z < 0 \\ {}_cD_x^n\left[{}_cD_x^{z-n} f(x)\right], \ n = \min\{k\in\mathbb{N} : k > \operatorname{Re} z\}, \ se \ \operatorname{Re} z > 0 \end{cases} \tag{2.45}$$

Resta contemplar agora o caso imaginário puro, que requer uma nova definição visto que o integral da definição anterior divergiria:

$${}_cD_x^z f(x) = D^1\,{}_cD_x^{-1+z} f(x), \ z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0 \wedge z \neq 0 \tag{2.46}$$

2.4. CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL DE ORDEM REAL (DEFINIÇÃO DE GRÜNWALD-LETNIKOFF)

Nesta secção, apresenta-se a extensão do operador de diferenciação ao caso em que a ordem de diferenciação é um real qualquer, de acordo com a definição introduzida por Grünwald-Letnikoff[17].

Por definição,

$$y'(x) = \frac{dy(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{y(x)-y(x-h)}{h} \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{dD^1 y(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{D^1 y(x) - D^1 y(x-h)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{y(x)-y(x-h)}{h} - \dfrac{y(x-h)-y(x-2h)}{h}}{h} = \end{aligned}$$

[16] Samko *et al.* (1993), p. 38.
[17] Miller *et al.* (1993), p. 38; Samko *et al.* (1993), p. 371.

$$= \lim_{h\to 0} \frac{y(x) - 2y(x-h) + y(x-2h)}{h^2} \tag{2.48}$$

$$y'''(x) = \frac{dD^2 y(x)}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{D^2 y(x) - D^2 y(x-h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{y(x) - 2y(x-h) + y(x-2h)}{h^2} - \dfrac{y(x-h) - 2y(x-2h) + y(x-3h)}{h^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{y(x) - 3y(x-h) + 3y(x+2h) - y(x-3h)}{h^3} \tag{2.49}$$

…

$$y^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} y(x-kh)}{h^n} \tag{2.50}$$

Esta definição é equivalente à seguinte:

$$y^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \binom{n}{k} y(x-kh)}{h^n}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.51}$$

Isso sucede porque, se $k > n, \quad k, n \in \mathbb{N}$, então

$$\binom{n}{k} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)} = \frac{n!}{k!\infty} = 0 \tag{2.52}$$

A definição anterior de derivada pode ser generalizada para definir

$$D^v y(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \binom{v}{k} y(x-kh)}{h^v}, \quad v \in \mathbb{R}^+ \tag{2.53}$$

Para generalizar a definição a toda a recta real, convém definir $n = \dfrac{x}{h}$ e fazer

$$D^v y(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \binom{v}{k} y(x-kh)}{h^v} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^{-v} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \binom{v}{k} y\left(x - k\frac{x}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^{-v} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(v-k+1)} y\left(x - k\frac{x}{n}\right) \tag{2.54}$$

Substituindo a igualdade (A.7)

$$\Gamma(x)\Gamma(-x+1) = (-1)^k \Gamma(-x-k+1)\Gamma(x+k) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Gamma(k-v)}{\Gamma(-v)} = (-1)^k \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-k+1)}, \quad v = -x \tag{2.55}$$

vem

$$D^v y(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\Gamma(-v)} \left(\frac{x}{n}\right)^{-v} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k-v)}{\Gamma(k+1)} y\left(x - k\frac{x}{n}\right), \quad v \in \mathbb{R} \tag{2.56}$$

Os resultados obtidos com esta definição são iguais àqueles a que se chega com a definição de Riemann-Liouville para a generalidade das funções que se encontram na prática[18].

No que se segue usar-se-á a definição de Riemann-Liouville, a menos que se indique o contrário.

2.5. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Nesta secção estudam-se as ferramentas necessárias à resolução de equações diferenciais em que surgem ordens de diferenciação não inteiras.

2.5.1. TRANSFORMADA DE LAPLACE

A transformada de Laplace do operador ${}_0D_x^v$ segue as regras válidas para a situação em que a ordem é inteira[19]; isto é, sendo $f(x)$ uma função nula para $x \in \mathbb{R}^-$,

$$\mathscr{L}\left[{}_0D_x^v f(x)\right] = s^v F(s), \ v \le 0 \tag{2.57}$$

$$\mathscr{L}\left[{}_0D_x^v f(x)\right] = s^v F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \, {}_0D_x^{v-k-1} f(0), \ n-1 < v \le n \in \mathbb{N} \tag{2.58}$$

2.5.2. RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES

A resolução de equações diferenciais fraccionárias por meio de transformadas de Laplace é em tudo semelhante ao que sucede quando as ordens de diferenciação são inteiras[20].

[18] Podlubny (1999), p. 200. Para mais pormenores sobre as condições necessárias para que os resultados sejam iguais, veja-se Podlubny (1999), pp. 75-77.

[19] Miller *et al.* (1993), pp. 69 e 123; Podlubny (1999), pp. 104-105.

[20] Miller *et al.* (1993), pp. 133 e ss.; Podlubny (1999), pp. 137 e ss. Em Miller *et al.* (1993), pp. 321 e ss., acham-se várias transformadas de Laplace de funções que aparecem correntemente na resolução deste tipo de equações diferenciais.

2.5.3. DIAGRAMAS DE BODE E DE NICHOLS

2.5.3.1. CASO REAL

Seja

$$F(s) = s^{v} \tag{2.59}$$

Então[21]

$$F(j\omega) = (j\omega)^{v} \tag{2.60}$$
$$|F(j\omega)| = |j^{v}\omega^{v}| = |\omega^{v}| = \omega^{v} \tag{2.61}$$
$$\arg[F(j\omega)] = \arg(j^{v}\omega^{v}) = \arg(j^{v}) \tag{2.62}$$

Embora haja vários complexos z de diferentes argumentos tais que $z = j^{v}$, se se optar pelo de argumento mais baixo no intervalo $[0;2\pi[$, ter-se-á

$$\arg[F(j\omega)] = v\frac{\pi}{2} \tag{2.63}$$

O ganho, expresso em decibel, será

$$|F(j\omega)| = 20\log_{10}\omega^{v} = 20v\log_{10}\omega \quad (\text{dB}) \tag{2.64}$$

Logo, os diagramas de Bode e de Nichols de $F(s) = s^{v}$ são

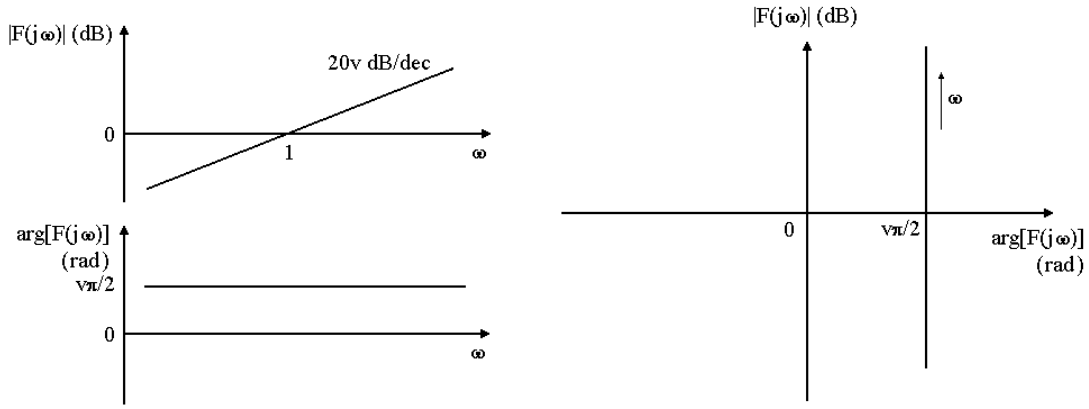

Figura 1 — Diagrama de Bode (à esquerda) e diagrama de Nichols (à direita) de $F(s)=s^{v}$, $v>0$

se $v > 0$ e

[21] Oustaloup (1991), pp. 366-367.

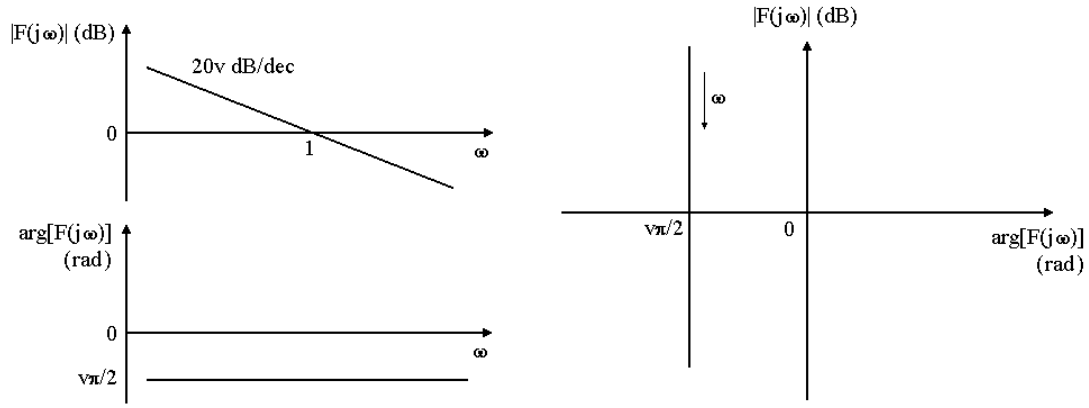

Figura 2 — Diagrama de Bode (à esquerda) e diagrama de Nichols (à direita) de $F(s)=s^v$, $v<0$

se $v < 0$.

2.5.3.2. CASO COMPLEXO

Mostra-se que[22]

$$F(s) = \mathrm{Re}\left(s^{a+jb}\right),\ a,b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

tem um diagrama de Bode e um diagrama de Nichols da forma

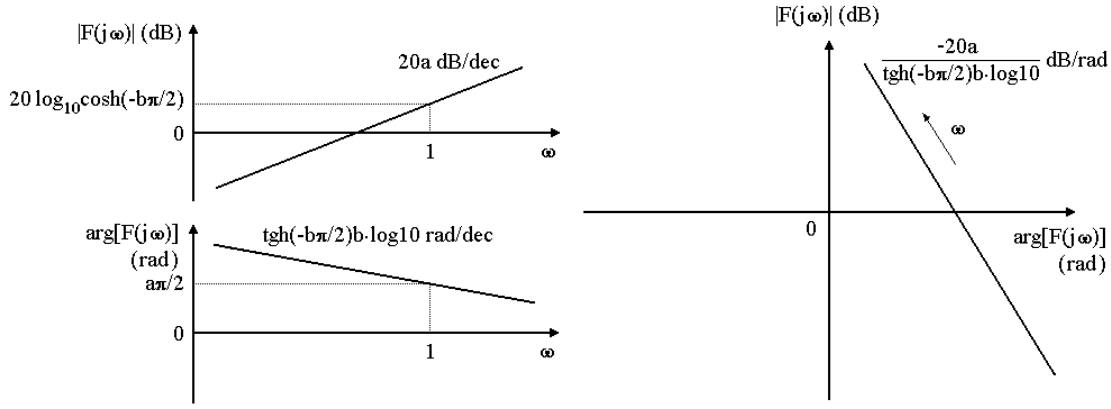

Figura 3 — Diagrama de Bode (à esquerda) e diagrama de Nichols (à direita) de $F(s)=\mathrm{Re}(s^{a+jb})$, $a>0$

se $a > 0$ e

[22] Oustaloup (1991), pp. 293-300.

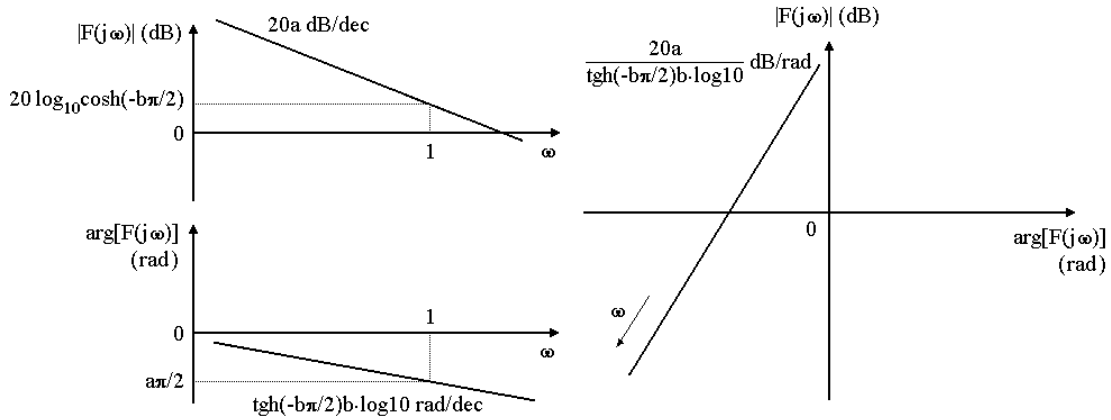

Figura 4 — Diagrama de Bode (à esquerda) e diagrama de Nichols (à direita) de $F(s)=\mathrm{Re}(s^{a+jb})$, $a<0$

se $a<0$.

De igual modo se mostra que a função

$$F(s)=\mathrm{Im}\left(s^{a+jb}\right),\ a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

tem um diagrama de Bode da forma

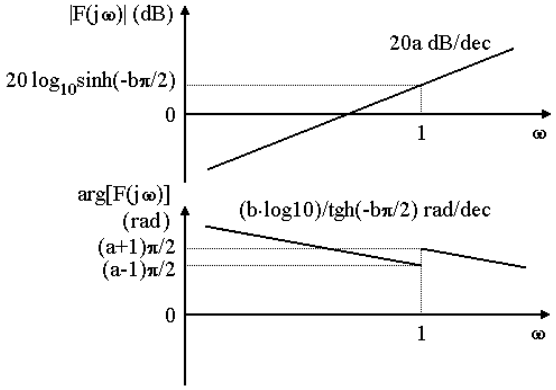

Figura 5 — Diagrama de Bode de $F(s)=\mathrm{Im}(s^{a+jb})$, $a>0$

se $a>0$ e

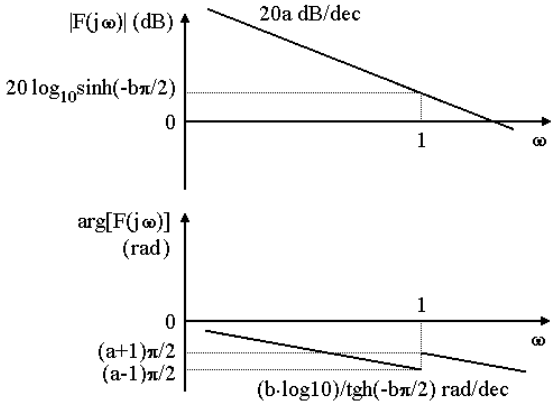

Figura 6 — Diagrama de Bode de $F(s)=\mathrm{Im}(s^{a+jb})$, $a<0$

se $a < 0$. Repare-se que agora é possível que o ganho para a frequência unitária seja negativo, porque a função seno hiperbólico tem todo o conjunto $\mathbb{R}$ por contradomínio. Não se apresentam os diagramas de Nichols respectivos por não serem necessários para a sequência dos resultados.

Deve contudo notar-se que a linearidade destes dois últimos diagramas é apenas aproximada e só se verifica numa vizinhança da frequência unitária. Para partes imaginárias superiores à unidade estende-se, para efeitos práticos, por pelo menos quatro décadas em torno da frequência unitária.

3. CONTROLO DE ORDEM NÃO INTEIRA

Este capítulo resume o essencial da teoria do controlo robusto de ordem não inteira. Inclui três secções.

A primeira secção diz respeito a controladores cujo objectivo é conseguir que a dinâmica em anel aberto seja a de uma função de transferência que é uma derivada de ordem real não inteira. Nas duas primeiras subsecções estuda-se a dinâmica em anel aberto e em anel fechado dessa função de transferência. Na terceira subsecção estuda-se como determinar os parâmetros dum controlador que assegure essa dinâmica para um sistema qualquer em anel fechado.

A segunda secção diz respeito a controladores cujo objectivo é conseguir que a dinâmica em anel aberto seja a de uma função de transferência que é uma derivada de ordem complexa. Nas duas primeiras subsecções estuda-se a dinâmica em anel aberto e em anel fechado dessa função de transferência. Na terceira subsecção estuda-se como determinar os parâmetros dum controlador que assegure essa dinâmica para um sistema qualquer em anel fechado.

O capítulo encerra com uma secção sobre como discretizar um controlador de ordem não inteira.

3.1. DERIVADA DE ORDEM REAL NÃO INTEIRA

3.1.1. ANEL ABERTO

Considere-se o seguinte sistema[23]:

$$G(s)=\left(\frac{\omega_0}{s}\right)^{v},\quad v\in\left]1;2\right[\tag{3.1}$$

Este sistema tem o seguinte diagrama de Bode[24]:

[23] No apêndice B acha-se a descrição dum sistema físico cujo modelo é esta função de transferência, e que justifica a escolha do intervalo de variação de *v*, que pode parecer arbitrário.

[24] Veja-se a subsecção 2.5.3. Recorde-se também que uma fase constante no diagrama de Bode corresponde a um diagrama de Nichols vertical. Veja-se Oustaloup (1991), p. 72.

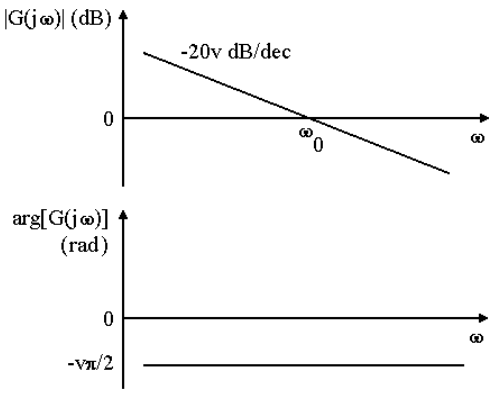

Figura 7 — Diagrama de Bode de $G(s)$

Repare-se que, mesmo que a frequência de cruzamento de ganho ω_0 varie, a margem de fase se mantém. Na realidade pode suceder que o sistema só obedeça à função de transferência enunciada numa certa gama de frequências. É preciso que a gama de frequências em que se quer controlar o sistema seja mais estreita, e que, mesmo que ω_0 varie, não alcance frequências em que o sistema já não pode ser descrito pela função de transferência $G(s)$. Verificando-se essas condições, a margem de fase será sempre constante[25].

Repare-se também que, se *v* aumentar, aproximando-se de 2, o diagrama de Bode do sistema ir-se-á aproximando do de um sistema com dois pólos na origem (comummente designado por sistema de ordem 2), e portanto a precisão do controlo será maior; mas a fase aproximar-se-á de $-\pi$, diminuindo portanto a margem de fase e a estabilidade. Mostra-se assim que a precisão do controlo e a sua estabilidade são objectivos contraditórios também com esta função de transferência[26].

3.1.2. ANEL FECHADO

3.1.2.1. RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

Considere-se o sistema (3.1) realimentado[27]:

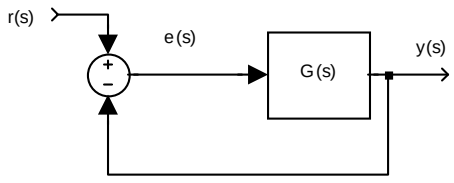

Figura 8 — Anel de realimentação

A função de transferência do anel fechado será

[25] Oustaloup (1991), pp. 74 e ss.. Nesse caso, o diagrama de Nichols só será vertical num certo troço correspondente às frequências em que a fase é constante. Veja-se Oustaloup (1991), pp. 72-73.

[26] Oustaloup (1991), p. 78.

[27] Oustaloup (1991), pp. 84-89.

$$F(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{1}{1+\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^{v}} \tag{3.2}$$

Como $j=e^{j\pi/2}$, vem

$$F(j\omega)=\frac{1}{1+\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^{v}}=\frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{v}e^{jv\pi/2}}=\frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{v}\left(\cos\frac{v\pi}{2}+j\sin\frac{v\pi}{2}\right)}=$$
$$=\frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{v}\cos\frac{v\pi}{2}+j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{v}\sin\frac{v\pi}{2}} \tag{3.3}$$

Assim,

$$\left|F(j\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{1+2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{v}\cos\frac{v\pi}{2}+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2v}\cos^2\frac{v\pi}{2}+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2v}\sin^2\frac{v\pi}{2}}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{v}\cos\frac{v\pi}{2}+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2v}}} \tag{3.4}$$

$$\arg\left[F(j\omega)\right]=-\operatorname{arctg}\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{v}\sin\frac{v\pi}{2}}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{v}\cos\frac{v\pi}{2}} \tag{3.5}$$

A frequência que corresponde a um valor máximo do ganho é dada por

$$\frac{d}{d\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}\left[1+2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{v}\cos\frac{v\pi}{2}+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2v}\right]=2v\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{v-1}\cos\frac{v\pi}{2}+2v\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2v-1}=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\cos\frac{v\pi}{2}+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{v}=0\Leftrightarrow\omega=\omega_0\sqrt[v]{-\cos\frac{v\pi}{2}} \tag{3.6}$$

Como $v\in\left]1;2\right[$, esta expressão tem significado e dá a frequência ω_R para a qual se verifica a ressonância. O ganho de ressonância é

$$\left|F\left(j\omega_R\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+2\left(\frac{\omega_0\sqrt[v]{-\cos\frac{v\pi}{2}}}{\omega_0}\right)^v \cos\frac{v\pi}{2}+\left(\frac{\omega_0\sqrt[v]{-\cos\frac{v\pi}{2}}}{\omega_0}\right)^{2v}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2\cos^2\frac{v\pi}{2}+\cos^2\frac{jv\pi}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\frac{v\pi}{2}}} = \frac{1}{\sin\frac{v\pi}{2}} \tag{3.7}$$

Os pólos de $F(s)$ são[28]

$$1+\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^v = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^v = e^{j(\pi+2k\pi)} \Leftrightarrow s = \omega_0 e^{j\frac{\pi+2k\pi}{v}},\ k\in\mathbb{Z} \tag{3.8}$$

Para obter todas as raízes da equação basta considerar os argumentos tais que

$$-\pi < \frac{\pi+2k\pi}{v} < \pi \Leftrightarrow -\pi v-\pi < 2k\pi < \pi v-\pi \Leftrightarrow \frac{-v-1}{2} < k < \frac{v-1}{2} \tag{3.9}$$

sendo a primeira passagem possível porque $2>v>1>0$. Aliás essa propriedade resulta em que

$$2>v>1 \Leftrightarrow \begin{cases} -3<-v-1<-2 \\ 1>v-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1{,}5<\frac{-v-1}{2}<-1 \\ 0{,}5>\frac{v-1}{2}>0 \end{cases} \Rightarrow -1{,}5<k<0{,}5 \tag{3.10}$$

E como *k* é inteiro, conclui-se que só pode assumir os valores 0 e -1, pelo que os pólos de $F(s)$ são os complexos conjugados

$$s_1 = \omega_0 e^{j\frac{\pi}{v}} \wedge s_2 = \omega_0 e^{-j\frac{\pi}{v}} \tag{3.11}$$

Pelas expressões para um sistema com dois pólos[29], a frequência amortecida é dada por

$$\omega_{am} = \omega_0 \sin\frac{\pi}{v} \tag{3.12}$$

e o coeficiente de amortecimento é dado por

[28] Oustaloup (1991), pp. 96-99.
[29] Botto (1998), p. 2.3.

$$\zeta = -\cos\frac{\pi}{v} \tag{3.13}$$

Estas expressões mostram que o amortecimento só depende da ordem do sistema, não variando com a sua frequência própria. Esta só influencia a sua frequência amortecida.

Da expressão do ganho de ressonância vem

$$v = \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{\left|F\left(j\omega_R\right)\right|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \zeta = -\cos\frac{\pi^2}{2\arcsin\dfrac{1}{\left|F\left(j\omega_R\right)\right|}} \Leftrightarrow \left|F\left(j\omega_R\right)\right| = \frac{1}{\sin\dfrac{\pi^2}{2\arccos\left(-\zeta\right)}} \tag{3.14}$$

Também se tem

$$\omega_{am} = \frac{\sin\dfrac{\pi}{v}}{\sqrt[v]{-\cos\dfrac{v\pi}{2}}}\omega_R \tag{3.15}$$

3.1.2.2. RESPOSTA NO TEMPO

A resposta ao degrau unitário de $F(s)$, dado pela expressão (3.2), é[30]

$$y\left(t\right) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{1+\left(\dfrac{s}{\omega_0}\right)^v}\frac{1}{s}\right] \tag{3.16}$$

Esta expressão avalia-se numericamente. O máximo valor de $y(t)$, em função de *v*, é muito bem aproximado por

$$\max_v y\left(t\right) = 79{,}195v^2 - 138{,}507v + 59{,}528 \tag{3.17}$$

Repare-se que este valor máximo só depende de *v*: não depende de ω_0.

[30] Oustaloup (1991), pp. 89-96.

3.1.3. DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS DUM CONTROLADOR

3.1.3.1. FASE DO CONTROLADOR

Do que atrás foi exposto na subsecção 3.1.1 resulta que se pretende[31], para controlar um sistema $S(s)$, obter um controlador $C(s)$ tal que $G(s)=C(s)S(s)$, onde $G(s)$ é a função de transferência dada por (3.1).

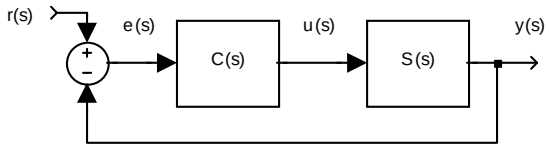

Figura 9 — Anel de controlo

Se a fase do sistema a controlar $S(s)$ for constante na gama de frequências em que há interesse, o controlador $C(s)$ também deverá ter uma fase constante nessa gama de frequências, para que $G(s)=C(s)S(s)$ possa ter uma fase constante. Caso a fase do sistema varie na gama de frequências de interesse, a fase do controlador também deverá variar, novamente para que $G(s)$ possa ter uma fase constante. Nesse caso, não é necessário que a dinâmica do controlador seja descrita por uma derivada de ordem não inteira. Mas assim as variações dos parâmetros do sistema que afectem a sua fase farão com que o controlador deixe de conseguir que o anel aberto tenha fase constante. Logo, se o sistema tiver uma fase variável, o controlo de ordem não inteira não será robusto face a variações dos parâmetros do sistema que lhe modifiquem a fase, e só será robusto face a variações do sistema que lhe modifiquem o ganho. Só um controlador para um sistema de fase constante será robusto a todas as suas variações de parâmetros.

3.1.3.2. O CONTROLADOR REAL E OS ERROS ESTACIONÁRIOS

A implementação dum controlador de ordem inteira nunca conseguirá um ganho em anel aberto arbitrariamente grande para frequências suficientemente baixas, como exige o diagrama da Figura 7. Na realidade, o diagrama de Bode em anel aberto (isto é, o diagrama de Bode de $G(s)=C(s)S(s)$) será provavelmente semelhante ao seguinte[32]:

[31] Oustaloup (1991), pp. 108-114.
[32] Oustaloup (1991), pp. 119-121.

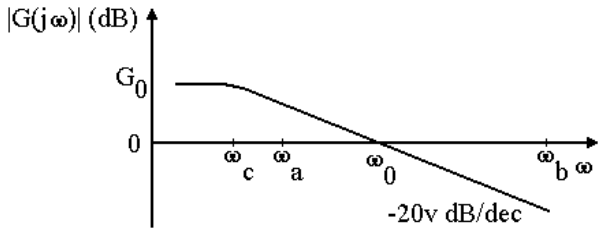

Figura 10 — Diagrama de Bode real

Na figura, $[\omega_a;\omega_b]$ é o intervalo de frequências de interesse. Deste modo as funções de transferência do anel aberto e do anel fechado serão, respectivamente,

$$G(s)=\frac{y(s)}{e(s)}=\frac{G_0}{\left(1+\frac{s}{\omega_0}\right)^v} \tag{3.18}$$

$$F(s)=\frac{y(s)}{r(s)}=\frac{1}{1+\frac{1}{G(s)}}=\frac{1}{\frac{\left(1+\frac{s}{\omega_0}\right)^v}{1+\frac{1}{G_0}}}\approx\frac{\frac{G_0}{1+G_0}}{1+\left(\frac{s}{\omega_0\sqrt[v]{G_0}}\right)^v} \tag{3.19}$$

O teorema do valor final permite achar os erros estacionários das respostas do anel fechado a degraus e a rampas unitários[33], que serão, respectivamente:

$$\varepsilon_{ed}=\frac{1}{1+G_0}\neq 0 \tag{3.20}$$

$$\varepsilon_{er}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{sG(s)}=+\infty \tag{3.21}$$

Como muitas vezes é importante assegurar um erro estacionário nulo na resposta ao degrau, ou um erro estacionário finito na resposta a uma rampa, é preciso nesses casos acrescentar algum outro elemento ao anel aberto[34]. Uma solução é colocar em série com o controlador de ordem não inteira um controlador PI. Esse controlador deverá ter uma frequência própria suficientemente baixa para influenciar o menos possível o regime transiente, deixando que este seja regido pelo controlador de ordem não inteira, aproveitando assim o seu bom desempenho no que diz respeito a sobreimpulsos independentes dos parâmetros do sistema. Claro que, quanto menor a frequência própria do controlador, maior será o tempo necessário para anular o erro estacionário, isto é, maior será o tempo de estabelecimento. Também é claro que a presença de controladores PI prejudica sempre o regime transiente, por muito baixas que sejam as suas frequências próprias.

A anulação do erro estacionário na resposta a uma rampa exige o emprego de dois controladores PI em série com o controlador de ordem não inteira.

[33] Ogata (1997), pp. 275 e ss..
[34] Oustaloup (1991), pp. 121-131.

Uma maneira de minorar os problemas que os controladores PI causam é projectar o controlador de ordem não inteira não para o sistema $S(s)$ mas sim para esse sistema já em série com os controladores PI que forem necessários.

3.1.3.3. CONTROLADOR DE FASE CONSTANTE

Nesta subsecção trata-se o caso em que se pretende um controlador de fase constante, que, como atrás se referiu, é necessário se o sistema também tiver uma fase constante na gama de frequências de interesse.

3.1.3.3.1. Determinação da função de transferência

Sendo a fase do controlador constante, a sua função de transferência deve ser uma integração ou diferenciação de ordem não inteira. Mas só precisa de o ser num intervalo de frequências que englobe o intervalo de frequências de interesse[35].

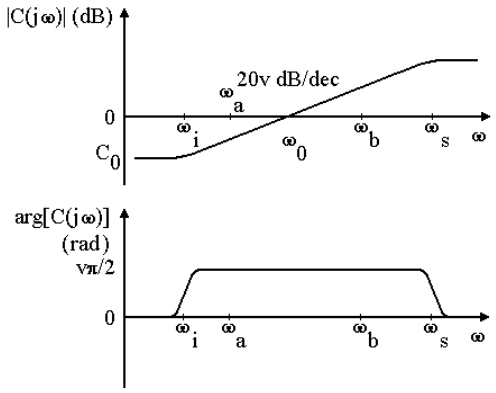

Figura 11 — Diagrama de Bode do controlador

A função de transferência correspondente a este diagrama é

$$C(s) = C_0 \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_i}}{1 + \frac{s}{\omega_s}} \right)^x \tag{3.22}$$

Deve ter-se $[\omega_a;\omega_b] \subset [\omega_i;\omega_s]$. Como a transição duma dinâmica qualquer para a dinâmica de ordem não inteira se processa ao longo duma gama de frequências, convém fazer $\omega_i = \omega_a/10 \wedge \omega_s = 10\omega_b$. Estes valores empíricos asseguram que em $[\omega_a;\omega_b]$ já se atingiu a dinâmica pretendida e ao mesmo tempo são o mais próximos possível para diminuir o risco de instabilidade numérica.

Para determinar os parâmetros *x* e C_0 do controlador é preciso saber:

- a ordem *n* da função de transferência do sistema $S(s)$;
- a frequência de cruzamento de ganho pretendida para o anel aberto ω_0;

[35] Oustaloup (1991), pp. 142-151.

❖ o ganho $\left|S(j\omega_0)\right|$;

❖ um dos seguintes valores: margem de fase pretendida Φ_m; ganho de ressonância em anel fechado pretendido $\left|F(j\omega_R)\right|$; coeficiente de amortecimento pretendido ζ; máximo valor pretendido da resposta no tempo ao degrau unitário $\max_v y(t)$.

A ordem de diferenciação *x* determina-se a partir da ordem do sistema *n* e da ordem pretendida para o anel aberto *v*, pois

$$\arg[G(s)] = \arg[C(s)] + \arg[S(s)] \Leftrightarrow -v\frac{\pi}{2} = x\frac{\pi}{2} - n\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = n - v \tag{3.23}$$

Quanto a *v*, determina-se de uma das maneiras seguintes:

❖ a partir da margem de fase pretendida:

$$\Phi_m = \pi + \arg[G(j\omega_0)] = \pi - v\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow v = \frac{2}{\pi}(\pi - \Phi_m) \Rightarrow x = n - 2\left(1 - \frac{\Phi_m}{\pi}\right) \tag{3.24}$$

❖ a partir do ganho de ressonância em anel fechado pretendido:

$$v = \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{\left|F(j\omega_R)\right|} \Rightarrow x = n - \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{\left|F(j\omega_R)\right|} \tag{3.25}$$

❖ a partir do coeficiente de amortecimento pretendido:

$$\zeta = -\cos\frac{\pi}{v} \Rightarrow v = \frac{\pi}{\arccos(-\zeta)} \Rightarrow x = n - \frac{\pi}{\arccos(-\zeta)} \tag{3.26}$$

❖ a partir do máximo valor pretendido da resposta no tempo ao degrau unitário:

$$\begin{aligned} &\max_v y(t) = 79{,}195v^2 - 138{,}507v + 59{,}528 \Rightarrow \\ &\Rightarrow v = \frac{138{,}507 + \sqrt{138{,}507^2 - 4\times 79{,}195\left(59{,}528 - \max_v y(t)\right)}}{2\times 79{,}195} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = n - \frac{138{,}507 + \sqrt{138{,}507^2 - 4\times 79{,}195\left(59{,}528 - \max_v y(t)\right)}}{2\times 79{,}195} \end{aligned} \tag{3.27}$$

(Note-se que na resolução da equação se tomou a raiz positiva para que *v* também o seja.)

Por último determina-se C_0 do seguinte modo:

$$\left|G(j\omega_0)\right| = \left|C(j\omega_0)S(j\omega_0)\right| = 1 \Leftrightarrow \tag{3.28}$$

$$\Leftrightarrow \left|C(j\omega_0)\right| = C_0 \left[\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_0}{\omega_i}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_0}{\omega_s}\right)^2}}\right]^x = \frac{1}{\left|S(j\omega_0)\right|} \Leftrightarrow C_0 = \frac{1}{\left|S(j\omega_0)\right|}\left[\frac{1+\left(\frac{\omega_0}{\omega_s}\right)^2}{1+\left(\frac{\omega_0}{\omega_i}\right)^2}\right]^{\frac{x}{2}}$$

3.1.3.3.2. Aproximação da função de transferência

O controlador dado pela expressão (3.22) e cujo diagrama de Bode está representado na Figura 11 não pode ser directamente implementado[36]. Se a ordem de derivação verificasse $v \in]0;1[$, podia-se aproximar do seguinte modo[37]:

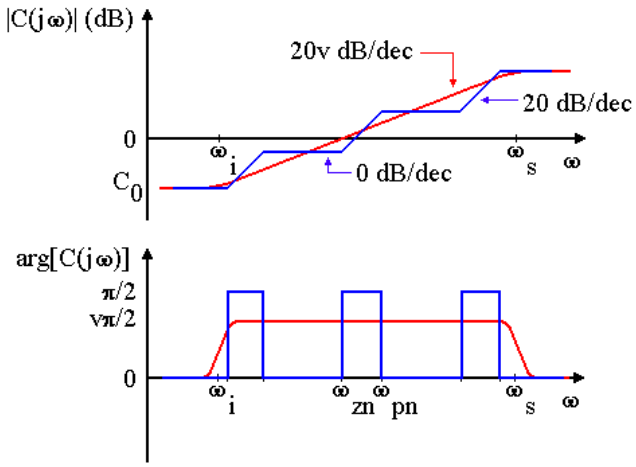

Figura 12 — Diagrama de Bode do controlador a implementar (a vermelho), e sua aproximação assimptótica (a azul)

A equação dessa aproximação é:

$$\hat{C}(s) = C_0 \prod_{n=1}^{N} \frac{1+\frac{s}{\omega_{zn}}}{1+\frac{s}{\omega_{pn}}} \tag{3.29}$$

As frequências dos sucessivos zeros e pólos verificam as seguintes relações de recursividade[38]:

[36] Oustaloup (1991), pp. 154-164.

[37] Compare-se com o que sucede com o sistema físico modelado no apêndice B; veja-se em particular a subsecção B.2.

[38] Estas relações justificam-se por comparação com o que sucede com o sistema físico modelado no apêndice B, e resultam da sua fractalidade.

$$\begin{cases} \dfrac{\omega_{pn}}{\omega_{zn}} = \alpha > 1 \\ \dfrac{\omega_{zn+1}}{\omega_{pn}} = \eta > 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\omega_{zn+1}}{\omega_{zn}} = \frac{\omega_{pn+1}}{\omega_{pn}} = \alpha\eta \tag{3.30}$$

N será o número de pólos e zeros, que depende dos valores de α e de η. Quanto maior for *N*, melhor será a aproximação conseguida; mas claro que computacionalmente convém que *N* não seja muito grande.

Logo, divide-se a função de transferência do controlador (3.22) do seguinte modo:

$$C(s) = C_0 \left(\frac{1 + \dfrac{s}{\omega_i}}{1 + \dfrac{s}{\omega_s}} \right)^m \left(\frac{1 + \dfrac{s}{\omega_i}}{1 + \dfrac{s}{\omega_s}} \right)^{x-m} \tag{3.31}$$

sendo[39]

$$m = \mathscr{E}(x) \tag{3.32}$$

e implementa-se na realidade um controlador que tem a seguinte função de transferência:

$$\widetilde{C}(s) = C_0 \left(\frac{1 + \dfrac{s}{\omega_i}}{1 + \dfrac{s}{\omega_s}} \right)^m \prod_{n=1}^{N} \frac{1 + \dfrac{s}{\omega_{zn}}}{1 + \dfrac{s}{\omega_{pn}}} \tag{3.33}$$

Tem-se

$$\omega_{pN} = \omega_{z1} \alpha^N \eta^{N-1} \tag{3.34}$$

Estabelece-se ainda que

$$\omega_i = \frac{\omega_{z1}}{\sqrt{\eta}} \wedge \omega_s = \omega_{pN} \sqrt{\eta} \tag{3.35}$$

para que

$$\omega_s = \omega_i \alpha^N \eta^N \tag{3.36}$$

Desta última expressão resulta

[39] Aqui $\mathscr{E}$ representa a função característica.

$$N = \log_{\alpha\eta} \frac{\omega_s}{\omega_i} = \frac{\log \frac{\omega_s}{\omega_i}}{\log \alpha\eta} \tag{3.37}$$

Convém que $5 < \alpha\eta < 10$ para que N não seja, como atrás se referiu, nem demasiado grande, o que é computacionalmente inconveniente, nem demasiado pequeno, o que originaria uma fraca aproximação da dinâmica pretendida. Um constrangimento adicional para o valor de $\alpha\eta$ é que deve originar um valor de N tal que $N \in \mathbb{N}$. Os valores de α e de η determinam-se por

$$\alpha = (\alpha\eta)^{x-m} \wedge \eta = (\alpha\eta)^{1-x+m} \tag{3.38}$$

mas podem ser alterados para $\alpha' > \alpha \wedge \eta' < \eta \wedge \alpha'\eta' = \alpha\eta$ com o intuito de melhorar a qualidade da aproximação da dinâmica pretendida nos extremos do intervalo $[\omega_i ; \omega_s]$. Essa alteração deve ser cuidadosa pois valores muito diferentes dos indicados originam oscilações da fase[40]. Refira-se ainda que estas são máximas quando $x - m = 0{,}5$.

As aproximações efectuadas podem fazer com que passe a verificar-se apenas aproximadamente a condição[41]

$$|G(j\omega_0)| = |C(j\omega_0)S(j\omega_0)| = 1 \tag{3.39}$$

Assim, sempre que se alterarem os pólos e os zeros, convém recalcular o ganho C_0.

3.1.3.4. CONTROLADOR DE FASE VARIÁVEL

Nesta subsecção trata-se o caso em que se pretende um controlador de fase variável, que, como atrás se referiu na subsecção 3.1.3.1, é necessário se o sistema também tiver uma fase variável na gama de frequências de interesse.

3.1.3.4.1. Determinação da função de transferência

O controlador terá uma estrutura genérica da forma[42]

$$C(s) = C_0 \frac{\prod_{j=1}^{m} \left(1 + \frac{s}{\omega_{zj}}\right)}{\prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{s}{\omega_{pj}}\right)} \tag{3.40}$$

[40] Oustaloup (1991), pp. 167-174.
[41] Oustaloup (1991), pp. 164.
[42] Oustaloup (1991), pp. 204-207. O mesmo autor apresenta, nas pp. 180-204, outras estruturas mais particulares e de pior desempenho mas que exigem menos esforço na determinação dos seus parâmetros.

Assumem-se estáveis todos os pólos e zeros. Quanto maiores forem *n* e *m*, melhor será a aproximação à fase conseguida, mas maiores serão as dificuldades computacionais.

A fase deste controlador é igual à dum sistema com a seguinte função de transferência:

$$\hat{C}(s) = C_0 \prod_{j=1}^{m+n} \frac{1}{1+\frac{s}{\omega_j}} \tag{3.41}$$

desde que a cada zero se faça corresponder um pólo instável. O argumento desta função é

$$\arg\left[\hat{C}(j\omega)\right] = -\sum_{j=1}^{m+n} \operatorname{arctg}\frac{\omega}{\omega_j} \tag{3.42}$$

Considere-se que se conhece a fase do sistema a controlar em $m+n$ frequências quaisquer, $\{\omega_{m1};\omega_{m2};\ldots;\omega_{m(m+n)}\}$. Essas frequências devem amostrar significativamente a variação da fase no intervalo de frequências de interesse $[\omega_a;\omega_b]$, seja nos seus extremos, seja no seu interior; devem naturalmente concentrar-se nos pontos onde a variação de fase seja mais acentuada e podem ser menos nas zonas onde a fase seja praticamente constante; além disso, para reduzir o esforço computacional, convém que sejam em número tão pequeno quanto possível, desde que a evolução da fase seja convenientemente representada. Para cada uma delas deve verificar-se

$$\arg\left[\hat{C}(j\omega_{mk})\right] + \arg\left[S(j\omega_{mk})\right] = -\pi + \Phi_m,\ k = 1\ldots m+n \tag{3.43}$$

sendo Φ_m a margem de fase desejada. A situação está representada na Figura seguinte.

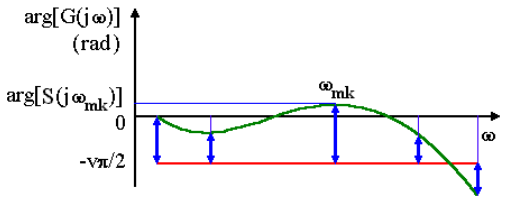

Figura 13 — Exemplo ilustrativo do objectivo dum controlador de fase variável; a verde, fase do sistema a controlar *S*; a vermelho, fase pretendida para o anel aberto; a azul, fase que o controlador deve ter a várias frequências

Este sistema equivale a

$$\arg\left[\hat{C}(j\omega_{mk})\right] = -\sum_{j=1}^{m+n} \operatorname{arctg}\frac{\omega_{mk}}{\omega_j} = -\pi + \Phi_m - \arg\left[S(j\omega_{mk})\right],\ k = 1\ldots m+n \tag{3.44}$$

Tem-se assim um sistema de $m+n$ equações com $m+n$ incógnitas, cuja resolução[43] permite achar os $m+n$ pólos de $\hat{C}(s)$. Para obter $C(s)$:

❖ desprezam-se os pólos ω_j tais que $\omega_b << \omega_j$, dado que o seu efeito na fase, no intervalo de frequências de interesse, é desprezável;

❖ desprezam-se os pólos cujo efeito conjunto na variação da fase é nulo;

❖ interpretam-se os pólos instáveis como zeros cujo efeito na fase seja o mesmo[44].

O ganho C_0 é uma vez mais determinado pela condição

$$\left|G(j\omega_0)\right| = \left|C(j\omega_0)S(j\omega_0)\right| = 1 \tag{3.45}$$

3.1.3.4.2. Pré-controlo do sistema a controlar

Como referido na subsecção 3.1.3.1, o controlador acabado de desenvolver só é robusto face às variações de parâmetros do sistema a controlar que não lhe alterem a fase. Mas é possível alterar a dinâmica do sistema, por meio dum pré-controlador, de tal forma que o desempenho do controlador possa ser melhor[45].

Considere-se o seguinte diagrama de blocos:

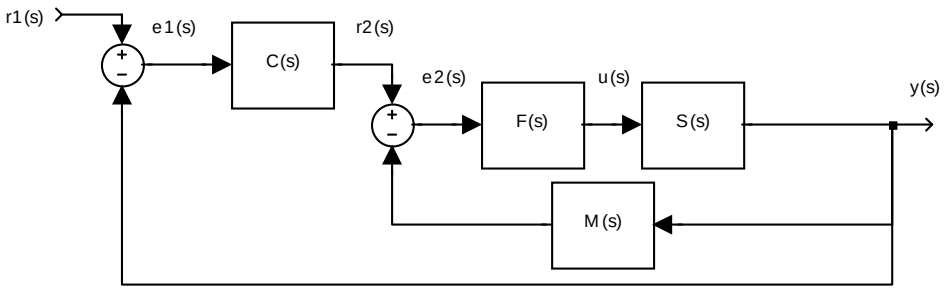

Figura 14 — Pré-controlo do sistema

---

[43] Oustaloup (1991), pp. 206-207, apresenta um modo de reduzir este sistema não linear a um linear, que permite uma resolução exacta. A demonstração da equivalência acha-se nas pp. 188-195.

[44] Cabe aqui ainda notar que este método pode ser usado para identificar qualquer função $F(s)$, bastando alterar o sistema de equações para

$$\arg\left[\hat{C}\left(j\omega_{mk}\right)\right] = -\sum_{j=1}^{M} \operatorname{arctg}\frac{\omega_{mk}}{\omega_j} = \arg\left[F\left(j\omega_{mk}\right)\right],\ k = 1\ldots n$$

Nesta expressão M é o número total de zeros e pólos, que não é necessariamente igual ao número de equações n, que é o número de pontos onde é conhecida a fase do sistema a identificar $F(s)$.

Resolvido o sistema, desprezam-se os pólos que não satisfazem os dois primeiros critérios referidos. Cada um dos pólos restantes pode ser interpretado como um pólo ou como um zero, com o mesmo efeito na fase. (Isto é, os pólos estáveis poderão ser pólos estáveis ou zeros de fase não-mínima; e os pólos instáveis poderão ser pólos instáveis ou zeros de fase mínima.) Havendo M pólos resultantes da solução do sistema, ter-se-ão assim 2^M hipóteses diferentes. Escolhe-se aquela cujo ganho melhor se aproximar do ganho da função a identificar.

Sobre este método de identificação, veja-se Oustaloup (1991), pp. 209-211.

[45] Oustaloup (1991), pp. 224-230.

Tem-se

$$\begin{aligned} & y(s) = S(s)F(s)\left[r_2(s) - M(s)y(s)\right] \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow y(s)\left[1 + S(s)F(s)M(s)\right] = S(s)F(s)r_2(s) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{y(s)}{r_2(s)} = \frac{S(s)F(s)}{1 + S(s)F(s)M(s)} = \frac{1}{M(s)}\frac{S(s)F(s)M(s)}{1 + S(s)F(s)M(s)} \end{aligned} \tag{3.46}$$

Se $F(s) >> 1$, ter-se-á $\frac{y(s)}{r_2(s)} \approx \frac{1}{M(s)}$. Há duas abordagens possíveis:

❖ Fazendo $M(s) = \left(\frac{s}{\omega_d}\right)^v$, o sistema com pré-controlo passará a ter uma fase constante e pode-se-lhe aplicar o controlador desenvolvido na subsecção 3.3. O problema desta abordagem é que provavelmente exigirá grandes acções de controlo $c(s)$. Convém que $F(s)$ seja um filtro passa-banda com ganho elevado apenas na vizinhança de ω_0, para minorar o problema das grandes acções de controlo.

❖ Fazendo $M(s) = \tilde{S}^{-1}(s)$, sendo $\tilde{S}(s)$ um modelo do sistema $S(s)$, o sistema com pré-controlo passará a comportar-se como o seu modelo, mesmo que os seus parâmetros variem. A vantagem desta abordagem é que, sendo previsível que $S(s)$ e $\tilde{S}(s)$ sejam sempre semelhantes, as acções de controlo nunca precisarão de ser muito elevadas. Em consequência, $F(s)$ poderá ser um filtro passa-baixo com ganho elevado na vizinhança de ω_0.

3.1.3.5. SENSIBILIDADE AO RUÍDO

Como referido na subsecção 3.1.2.1, seja o controlador de fase constante ou de fase variável, a função de transferência em anel fechado será

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^v} \tag{3.47}$$

Esta é a função de transferência dum filtro passa-baixo, cuja frequência de corte é ω_0. Considere-se agora o anel fechado, sem pré-controlo, afectado de perturbações ou ruído[46]:

[46] Oustaloup (1991), pp. 235-239.

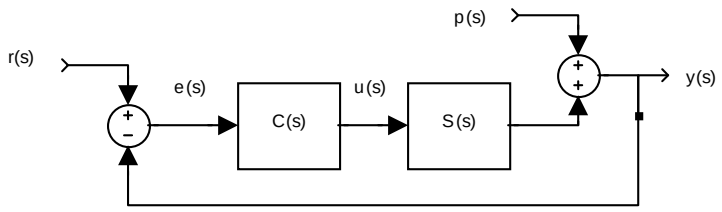

Figura 15 — Anel com ruído

A função de transferência será:

$$y(s) = p(s) + S(s)C(s)[r(s) - y(s)] \Leftrightarrow y(s)[1 + S(s)C(s)] = p(s) + S(s)C(s)r(s) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y(s) = \frac{1}{1 + S(s)C(s)} p(s) + \frac{S(s)C(s)}{1 + S(s)C(s)} r(s) \tag{3.48}$$

Vê-se que a saída depende do ruído por meio duma função de transferência que, como

$$C(s)S(s) = G(s) = \left(\frac{\omega_0}{s}\right)^v, \quad v \in]1;2[\tag{3.49}$$

é igual a

$$\frac{y(s)}{p(s)} = \left.\frac{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^v}{1 + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^v}\right|_{r(s)=0} \tag{3.50}$$

Esta é a função de transferência dum filtro passa-alto, que tem a mesma frequência de corte que o filtro (3.47) que relaciona a saída com a referência. Como se vê, melhorar esta última relação faz com que o anel fechado fique mais sensível a perturbações ou a ruído. Um modo de minorar o problema consiste em fazer com que ω_0 se encontre no extremo superior do intervalo $[\omega_a;\omega_b]$, para que os ganhos a frequências elevadas não sejam significativos. Outro modo de obter o mesmo resultado é juntar um filtro passa-baixo ao anel aberto, de preferência antes de se projectar o controlador para que este já o leve em conta[47].

Considere-se agora o anel de controlo com perturbações ou ruído mas com a presença de pré-controlo[48].

[47] Oustaloup (1991), pp. 249-265.
[48] Oustaloup (1991), pp. 239-245.

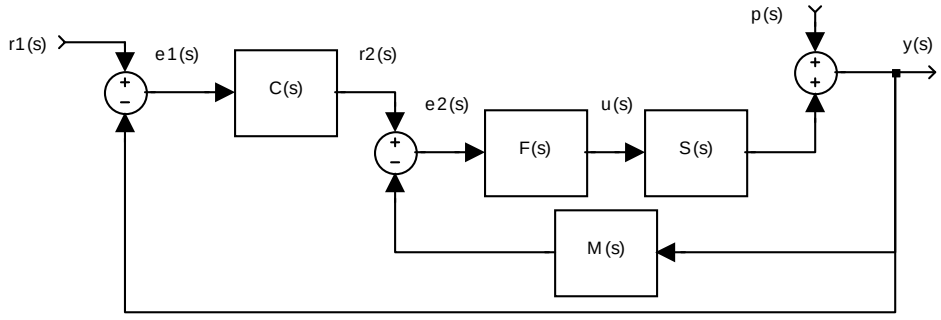

Figura 16 — Anel com pré-controlo e ruído

Agora tem-se

$$y(s) = p(s) + S(s)F(s)\left[r_2(s) - M(s)y(s)\right] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y(s)\left[1 + S(s)F(s)M(s)\right] = p(s) + S(s)F(s)r_2(s) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y(s) = \frac{1}{1 + S(s)F(s)M(s)}p(s) + \frac{S(s)F(s)}{1 + S(s)F(s)M(s)}r_2(s) \tag{3.51}$$

Fazendo

$$F_1(s) = \frac{S(s)F(s)}{1 + S(s)F(s)M(s)} \wedge F_2(s) = \frac{1}{1 + S(s)F(s)M(s)} \tag{3.52}$$

pode-se reduzir este caso ao diagrama seguinte:

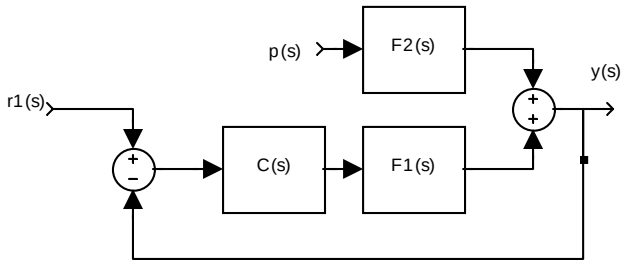

Figura 17 — Anel equivalente ao anterior

Reaproveitando agora os resultados da situação sem pré-controlo,

$$y(s) = \frac{1}{1 + F_1(s)C(s)}F_2(s)p(s) + \frac{F_1(s)C(s)}{1 + F_1(s)C(s)}r_1(s) \tag{3.53}$$

A função de transferência que relaciona a saída com as perturbações está decomposta em duas. A primeira é a dum filtro passa-alto, como se conclui comparando-a com a função de transferência que relaciona a saída com a referência. A sua frequência de corte é a mesma. A segunda função é a do anel interno de pré-controlo. Esse anel deve, naturalmente, ser mais rápido que o anel exterior, e quanto mais rápido for melhor será o pré-controlo. Mas quanto mais rápido, também mais

rápida será a resposta às perturbações e ao ruído, o que mostra que a rejeição destes é uma vez mais um objectivo que contraria a robustez do controlo. Por isso, se $M(s)=\left(\frac{s}{\omega_d}\right)^v$, não convém que a ordem *v* seja muito elevada, uma vez mais para que o ganho não seja muito grande a frequências elevadas[49].

3.2. DERIVADA DE ORDEM COMPLEXA

3.2.1. ANEL ABERTO

Como é referido na subsecção 3.1.3, o objectivo do controlo aí desenvolvido é conseguir uma dinâmica em anel aberto da forma

$$G(s)=\left(\frac{\omega_0}{s}\right)^v, \quad v\in\left]1;2\right[\tag{3.1}$$

Como aí se refere também, se a fase do sistema a controlar variar no intervalo de frequências em consideração, a fase do controlador deverá variar também, para que o anel aberto tenha uma fase constante. Mas assim, se os parâmetros do sistema variarem de tal modo que a fase do sistema seja alterada, a margem de fase do anel aberto variará: o controlo só será robusto face a alterações de parâmetros que não alterem a fase do sistema a controlar.

Nestas condições, não faz sentido pretender uma margem de fase constante para o anel aberto, nem um máximo valor para a resposta a um degrau unitário, visto que esse valor máximo depende da margem de fase. Mas faz sentido pretender que o ganho de ressonância em anel fechado não exceda um certo valor, limitando assim o valor da saída; ou que o coeficiente de amortecimento não seja inferior a um certo valor, limitando assim as oscilações na resposta a um degrau[50].

De facto, seja a resposta do anel aberto formado pelo controlador e pelo sistema a controlar, para uma dada frequência,

$$G(j\omega)=\left|G(j\omega)\right|e^{j\arg\left[G(j\omega)\right]}\equiv\Theta e^{j\theta} \tag{3.54}$$

O ganho em anel fechado será

$$F(j\omega)=\frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)}=\frac{\left|G(j\omega)\right|e^{j\arg\left[G(j\omega)\right]}}{1+\left|G(j\omega)\right|e^{j\arg\left[G(j\omega)\right]}}\equiv\frac{\Theta e^{j\theta}}{1+\Theta e^{j\theta}} \tag{3.55}$$

pelo que

[49] Oustaloup (1991), pp. 266-275.
[50] Oustaloup (1991), pp. 286-289.

$$\left|F\left(j\omega\right)\right| = \left|\frac{\Theta e^{j\theta}}{1+\Theta e^{j\theta}}\right| = \frac{\Theta}{\left|1+\Theta\cos\theta + j\Theta\sin\theta\right|} =$$
$$= \frac{\Theta}{\sqrt{\left(1+\Theta\cos\theta\right)^2+\left(\Theta\sin\theta\right)^2}} = \frac{\Theta}{\sqrt{1+\Theta^2\cos^2\theta+2\Theta\cos\theta+\Theta^2\sin^2\theta}} =$$
$$= \frac{\Theta}{\sqrt{1+\Theta^2+2\Theta\cos\theta}} \tag{3.56}$$

O ganho de ressonância em anel fechado será assim dado por

$$\left|F\left(j\omega_R\right)\right| = \max_{\omega}\frac{\left|G\left(j\omega\right)\right|}{\sqrt{1+\left|G\left(j\omega\right)\right|^2+2\left|G\left(j\omega\right)\right|\cos\left[\arg G\left(j\omega\right)\right]}} \tag{3.57}$$

Também é possível mostrar[51] que o coeficiente de amortecimento é praticamente constante ao longo das curvas em que é constante a função

$$\xi = \frac{20\log_{10}\frac{\Theta}{\sqrt{1+\Theta^2+2\Theta\cos\theta}}+20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{1+\Theta^2+2\Theta\cos\theta}}}{2} =$$
$$= 10\log_{10}\frac{\Theta}{1+\Theta^2+2\Theta\cos\theta} \tag{3.58}$$

e que sendo $\theta_{\Theta=1}$ o ponto de cada curva correspondente a $\Theta = 1 = 0dB$, se terá (compare-se esta expressão com a expressão (3.13) e a Figura 7)

$$\zeta = -\cos\frac{\pi^2}{2\theta_{\Theta=1}} \tag{3.59}$$

Daqui se conclui que

$$\Theta = 1 \Rightarrow \xi = 10\log_{10}\frac{1}{2+2\cos\theta_{\Theta=1}} \Rightarrow \frac{1}{2+2\cos\theta_{\Theta=1}} = 10^{\frac{\xi}{10}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2+2\cos\theta_{\Theta=1} = 10^{-\frac{\xi}{10}} \Rightarrow \cos\theta_{\Theta=1} = \frac{10^{-\frac{\xi}{10}}-2}{2} \Rightarrow \theta_{\Theta=1} = \arccos\frac{10^{-\frac{\xi}{10}}-2}{2} \tag{3.60}$$

e portanto

$$\zeta = -\cos\frac{\pi^2}{2\arccos\frac{10^{-\frac{\xi}{10}}-2}{2}} = \tag{3.61}$$

[51] Oustaloup (1991), pp. 395-398.

$$= -\cos\frac{\pi^2}{2\arccos\dfrac{10^{-\frac{10\log_{10}\frac{\Theta}{1+\Theta^2+2\Theta\cos\theta}}{10}}-2}{2}} = -\cos\frac{\pi^2}{2\arccos\dfrac{\frac{1+\Theta^2+2\Theta\cos\theta}{\Theta}-2}{2}}$$

O menor coeficiente de amortecimento será

$$\min_{\omega}\zeta = \min_{\omega}\left\{-\cos\frac{\pi^2}{2\arccos\dfrac{\frac{1+\left|G(j\omega)\right|^2+2\left|G(j\omega)\right|\cos\left[\arg G(j\omega)\right]}{\left|G(j\omega)\right|}-2}{2}}\right\} \quad (3.62)$$

As curvas de nível de $\left|F(j\omega)\right|$ e de ζ representadas no plano de Nichols constam da Figura seguinte[52]. Têm uma periodicidade de 2π rad segundo o eixo das fases e são simétricas em torno de todas as rectas verticais da forma $x=(2n+1)\pi$ rad, $n\in\mathbb{Z}$, pelo que basta representá-las a partir de $-\pi$ rad.

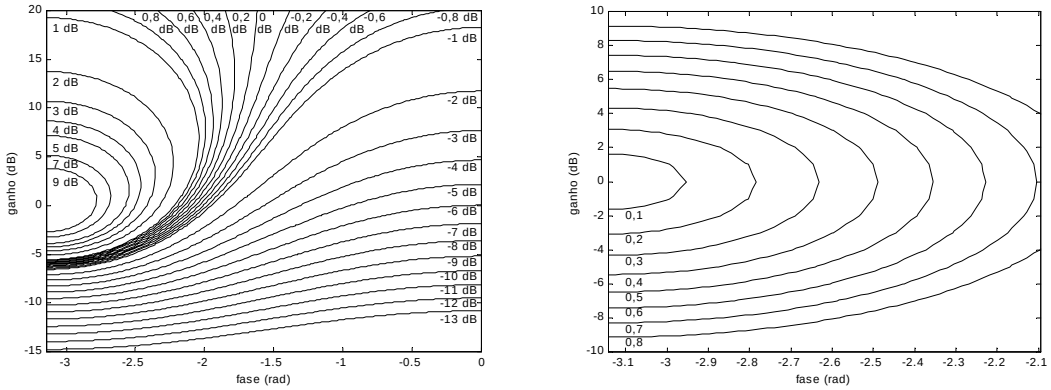

Figura 18 — Curvas de nível das funções de ganho do anel fechado (à esquerda) e de coeficiente de amortecimento do anel fechado (à direita) no plano de Nichols; as cotas encontram-se abaixo ou à direita da curva respectiva

Então, o objectivo do controlador a desenvolver deverá ser o de fazer com que o diagrama de Nichols do anel aberto formado pelo controlador e pelo sistema a controlar nunca cruze as curvas de nível correspondentes ao comportamento em anel fechado que se quer evitar. A Figura seguinte mostra um exemplo de aplicação desse objectivo[53]. À esquerda encontra-se o diagrama de Nichols dum sistema; um dos parâmetros físicos de que ele depende pode variar, e as três curvas correspondem a três valores que ele pode assumir. As especificações de controlo exigem que o anel fechado de controlo tenha um ganho sempre negativo. À direita encontra-se o diagrama de Nichols do anel aberto

[52] Ogata (1997), p. 562; Oustaloup (1991), p. 398.

[53] O sistema representado na Figura é o que será abordado adiante na secção 5.1. O controlador que consegue o desempenho ilustrado no gráfico da direita é o controlador apresentado em Oustaloup *et al.* (1995) e referido na subsecção 5.1.4.5.

formado por esse sistema e por um controlador apropriado. Para nenhum dos valores assumidos pelo parâmetro variável o diagrama de Nichols cruza a zona perto da origem que corresponde a um ganho positivo em anel fechado, como se pretendia.

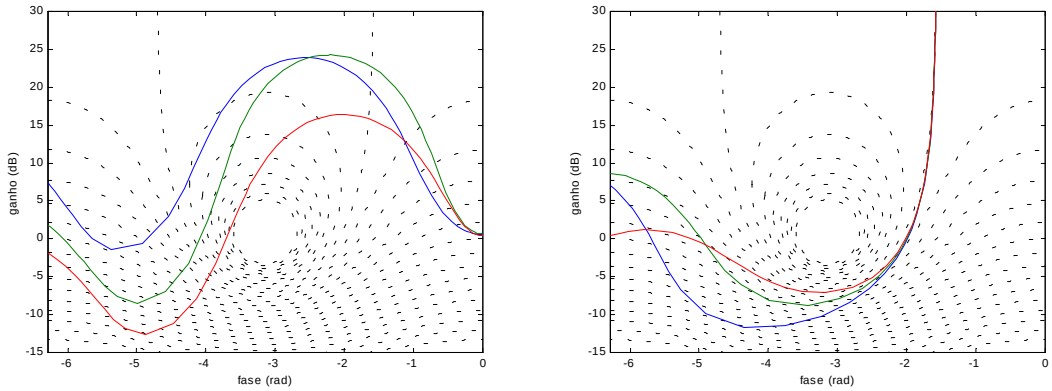

Figura 19 — Exemplo ilustrativo do objectivo dum controlador óptimo; as curvas de nível do ganho do anel fechado estão traçadas para todos os valores entre –15 dB e 7 dB

Por razões de simplicidade dos cálculos, adopta-se para o anel aberto uma fase que varie linearmente com o logaritmo da frequência, e que será representada por um segmento de recta num diagrama de Bode[54]. Para determinar qual a inclinação da fase mais conveniente em cada caso, recorre-se a uma função de custo quadrática que se pretende minimizar[55]. Seja $S(0)$ o ganho do sistema a controlar em regime estacionário, e sejam ω_{zi} e ω_{pi} os seus zeros e pólos, em número de n_z e n_p, respectivamente. Essas grandezas poderão sofrer variações $\Delta S(0)$, $\Delta\omega_{zi}$ e $\Delta\omega_{pi}$, que estarão limitadas entre valores máximos e mínimos[56].

Vê-se que, se a função do anel aberto $G(s)$ for alterada pelas variações $\Delta S(0)$, $\Delta\omega_{zi}$ e $\Delta\omega_{pi}$ do sistema que se pretende controlar, variarão também $\left|F(j\omega_R)\right|$ e $\min_{\omega}\zeta$. Assim, a cada dinâmica em anel aberto $G(s)$, correspondente a uma diferente inclinação da fase, far-se-á corresponder o valor da função de custo

$$\begin{aligned} J\left(\Delta\left|F\left(j\omega_R\right)\right|\right) &= \left(\Delta\left|F\left(j\omega_R\right)\right|_{S(0)_{\min}}\right)^2 + \left(\Delta\left|F\left(j\omega_R\right)\right|_{S(0)_{\max}}\right)^2 + \\ &+\sum_{i=1}^{n_z}\left[\left(\Delta\left|F\left(j\omega_R\right)\right|_{\omega_{zi\,\min}}\right)^2 + \left(\Delta\left|F\left(j\omega_R\right)\right|_{\omega_{zi\,\max}}\right)^2\right] + \\ &+\sum_{i=1}^{n_p}\left[\left(\Delta\left|F\left(j\omega_R\right)\right|_{\omega_{pi\,\min}}\right)^2 + \left(\Delta\left|F\left(j\omega_R\right)\right|_{\omega_{pi\,\max}}\right)^2\right] \end{aligned} \qquad (3.63)$$

ou da função de custo

[54] Oustaloup (1991), pp. 283-284.
[55] Oustaloup (1991), pp. 290-292.
[56] Quando haja incertezas acerca da própria estrutura do modelo do sistema, isto é, quando haja incertezas sobre o número de zeros e de pólos, pode considerar-se que existem todos os zeros e pólos possíveis. As frequências dos zeros e pólos que não se sabe se existem terão incertezas associadas que poderão colocá-los a frequências claramente superiores ao intervalo de frequências de interesse; se isso suceder, será como se não existissem.

$$J(\Delta\zeta) = \left(\Delta\zeta_{S(0)_{\min}}\right)^2 + \left(\Delta\zeta_{S(0)_{\max}}\right)^2 + \\ + \sum_{i=1}^{n_z}\left[\left(\Delta\zeta_{\omega_{zi\,\min}}\right)^2 + \left(\Delta\zeta_{\omega_{zi\,\max}}\right)^2\right] + \sum_{i=1}^{n_p}\left[\left(\Delta\zeta_{\omega_{pi\,\min}}\right)^2 + \left(\Delta\zeta_{\omega_{pi\,\max}}\right)^2\right] \tag{3.64}$$

e optar-se-á pela que conseguir o valor mais baixo.

Como ficou visto na subsecção 2.5.3.2, a função de transferência correspondente à dinâmica em consideração será, para uma fase decrescente, da forma[57]

$$G(s) = k\,\mathrm{Re}\left[\left(\frac{\omega_0}{s}\right)^{a+jb}\right],\ a,b \in \mathbb{R}^+ \tag{3.65}$$

Repare-se que *a* deve ser positivo para que o sistema seja estável (caso contrário ter-se-ia $\lim_{\omega\to+\infty} G(j\omega) = +\infty$). Quanto a *b*, ver-se-á já de seguida que a função de transferência é par, pelo que basta considerá-lo positivo. O ganho *k* está presente para assegurar que $G(j\omega_0) = 1$.

Tem-se que

$$G(s) = k\,\mathrm{Re}\left[\left(\frac{\omega_0}{s}\right)^{a+jb}\right] = k\,\mathrm{Re}\left[\left(\frac{\omega_0}{s}\right)^{a}\left(\frac{\omega_0}{s}\right)^{jb}\right] = k\,\mathrm{Re}\left[\left(\frac{\omega_0}{s}\right)^{a} e^{\log\left(\frac{\omega_0}{s}\right)^{jb}}\right] = \\ = k\,\mathrm{Re}\left[\left(\frac{\omega_0}{s}\right)^{a} e^{jb\log\left(\frac{\omega_0}{s}\right)}\right] = k\left(\frac{\omega_0}{s}\right)^{a}\cos\left[b\log\left(\frac{\omega_0}{s}\right)\right] \tag{3.66}$$

Pelo que ficou visto na subsecção 2.5.3.2, tem-se

$$G(j\omega_0) = k\cosh\left(b\frac{\pi}{2}\right) \tag{3.67}$$

Assim, para que $G(j\omega_0) = 1$, ter-se-á

$$k = \frac{1}{\cosh\left(b\frac{\pi}{2}\right)} \tag{3.68}$$

Como o coseno é uma função par, ter-se-á finalmente

$$G(s) = \left(\cosh\frac{b\pi}{2}\right)^{-1}\left(\frac{\omega_0}{s}\right)^{a}\cos\left(b\log\frac{\omega_0}{s}\right) =$$

[57] Oustaloup (1991), pp. 293-303. Recorde-se que, como uma derivada de ordem complexa tem um diagrama de Bode linear quer na fase quer no ganho, o diagrama de Nichols correspondente será um segmento de recta não vertical. Vejam-se a subsecção 2.5.3.2 e Oustaloup (1991), pp. 293-303.

$$= \left(\cosh\frac{b\pi}{2}\right)^{-1}\left(\frac{\omega_0}{s}\right)^a \cos\left[b\log\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^{-1}\right] = \left(\cosh\frac{b\pi}{2}\right)^{-1}\left(\frac{\omega_0}{s}\right)^a \cos\left(-b\log\frac{s}{\omega_0}\right) =$$

$$= \left(\cosh\frac{b\pi}{2}\right)^{-1}\left(\frac{\omega_0}{s}\right)^a \cos\left(b\log\frac{s}{\omega_0}\right) \tag{3.69}$$

Para se obter uma fase crescente não basta mudar o sinal de *b*, visto que as funções coseno e coseno hiperbólico são pares. É preciso inverter o coseno para lhe inverter a fase. Para que $G(j\omega_0)=1$ será preciso agora inverter também *k*. O resultado final é

$$G(s) = \cosh\frac{b\pi}{2}\left(\frac{\omega_0}{s}\right)^a\left[\cos\left(b\log\frac{s}{\omega_0}\right)\right]^{-1} \tag{3.70}$$

Estas duas expressões podem juntar-se da seguinte forma, que permite que o sinal de *b* indique qual a inclinação da fase:

$$G(s) = \begin{cases} \cosh\frac{b\pi}{2}\left(\frac{\omega_0}{s}\right)^a\left[\cos\left(b\log\frac{s}{\omega_0}\right)\right]^{-1} & se\ b>0 \\ \left(\cosh\frac{b\pi}{2}\right)^{-1}\left(\frac{\omega_0}{s}\right)^a \cos\left(b\log\frac{s}{\omega_0}\right) & se\ b<0 \end{cases} \tag{3.71}$$

3.2.2. ANEL FECHADO

Considere-se o sistema (3.71) realimentado:

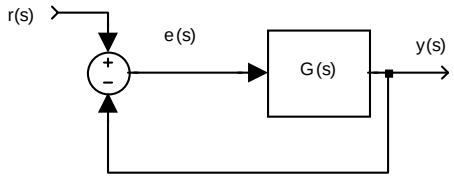

Figura 20 — Anel de realimentação

A função de transferência do anel fechado será

$$F(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\left(\cosh\frac{b\pi}{2}\right)^{-1}\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^a \cos\left(b\log\frac{s}{\omega_0}\right)} & se\ b>0 \\ \dfrac{1}{1+\cosh\frac{b\pi}{2}\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^a\left[\cos\left(b\log\frac{s}{\omega_0}\right)\right]^{-1}} & se\ b<0 \end{cases} \tag{3.72}$$

Os pólos desta função de transferência têm de ser calculados numericamente por causa da complexidade da expressão[58]. A frequência própria e o amortecimento podem ser achados a partir deles[59]. Se $b \approx 0$, permanecem válidas, como boas aproximações, as expressões do caso real[60], desprezando *b*:

$$\omega_{am} = \omega_0 \sin\frac{\pi}{a} \tag{3.73}$$

$$\zeta = -\cos\frac{\pi}{a} \tag{3.74}$$

3.2.3. DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS DUM CONTROLADOR

3.2.3.1. FASE DO CONTROLADOR

Do que atrás foi exposto na subsecção 3.2.1 resulta que se pretende[61], para controlar um sistema $S(s)$, obter um controlador $C(s)$ tal que $G(s) = C(s)S(s)$, onde $G(s)$ é a função de transferência dada por (3.71). A fase em anel aberto será linear com o logaritmo da frequência: para abreviar, doravante essa variação será referida como logarítmica.

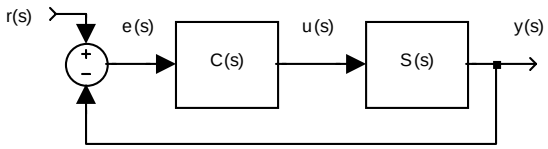

Figura 21 — Anel de controlo

Se a fase do sistema a controlar $S(s)$ for logarítmica na gama de frequências em que há interesse, o controlador $C(s)$ também deverá ter uma fase logarítmica nessa gama de frequências, para que $G(s) = C(s)S(s)$ possa ter uma fase logarítmica. Se a fase do sistema $S(s)$ não for logarítmica mas a gama de frequências em que há interesse for estreita, um controlador de fase logarítmica pode fornecer uma aproximação suficiente. Caso a fase do sistema varie na gama de frequências de interesse de tal forma que a aproximação logarítmica seja má, a fase do controlador também deverá variar duma forma não logarítmica (isto é, não linear com o logaritmo das frequências). Nesse caso, há que recorrer ao controlador de fase variável descrito na subsecção 3.1.3.4.

Quanto ao controlador de fase logarítmica, pode ser implementado de duas maneiras: por meio de pólos e zeros reais, ou por meio duma derivada complexa.

[58] Oustaloup (1991), pp. 314-316.
[59] Oustaloup (1991), p. 320.
[60] Veja-se a subsecção 3.1.2.1.
[61] Oustaloup (1991), pp. 334-336.

3.2.3.2. CONTROLADOR DE FASE LOGARÍTMICA COM PÓLOS E ZEROS REAIS

Seja A o declive da fase com o logaritmo da frequência que se pretende em anel aberto, e seja B o declive da fase do sistema a controlar com o logaritmo da frequência. Assim, o controlador deverá ter uma fase de declive $A-B$. Essa fase pode ser decomposta do seguinte modo[62]:

$$\arg\left[C(j\omega)\right] = \arg\left[G(j\omega_0)\right] - \arg\left[S(j\omega_0)\right] + (A-B)\log\frac{\omega}{\omega_0} \tag{3.75}$$

Os dois primeiros termos, constantes, podem ser obtidos por meio dum controlador de fase constante[63], desenvolvido na subsecção 3.1.3.3, bastando usar, se a gama de frequências de interesse for de apenas uma década, $N = 2$.

O último termo pode conseguir-se com um controlador de fase variável. Para inclinações até 1,2 e intervalos de interesse não superiores a uma década bastam novamente dois pólos e dois zeros, estando estes dois últimos entre os dois primeiros ou os dois primeiros entre os dois últimos, consoante a inclinação pretendida seja positiva ou negativa[64].

3.2.3.3. CONTROLADOR DE FASE LOGARÍTMICA COM UMA DERIVAÇÃO COMPLEXA

Como atrás se viu, uma fase logarítmica, isto é, uma fase que varie linearmente com o logaritmo da frequência, pode ser obtida com uma derivada de ordem complexa. O controlador só precisa de ter esse comportamento num intervalo de frequências que inclua a gama de frequências de interesse. Assim, a função de transferência do controlador poderá ser[65]

$$C(s) = k\,\mathrm{Re}\left[\left(\frac{\omega_i}{\omega_s}\frac{1+\dfrac{s}{\omega_i}}{1+\dfrac{s}{\omega_s}}\right)^{c+jd}\right] \tag{3.76}$$

As ordens de diferenciação c e d e o ganho k determinam-se com base no diagrama de Bode, por forma a que este seja o pretendido. O intervalo de frequências que engloba as frequências de interesse $[\omega_a;\omega_b]$ pode, tal como se fez com o controlador de fase constante, determinar-se por $\omega_i = \omega_a/10 \wedge \omega_s = 10\omega_b$.

Para implementar um controlador de fase logarítmica cuja fase seja decrescente, pode-se usar uma distribuição recursiva de pólos da seguinte forma:

[62] Oustaloup (1991), pp. 336-338.
[63] Oustaloup (1991), pp. 338-341.
[64] Oustaloup (1991), pp. 341-345.
[65] Oustaloup (1991), pp. 348-349.

$$C(s)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{s}{\omega_{pi}}}$$
$$\omega_{pi+1}=\alpha\omega_{pi},\quad i=1\ldots n-1 \tag{3.77}$$

Desta forma os pólos serão equidistantes numa escala logarítmica. Cada pólo faz a fase descer π rad; se houver um pólo em cada década (o que corresponde a um parâmetro $\alpha=10$), os seus efeitos sobrepor-se-ão, e a função de transferência terá uma fase praticamente linear, com uma inclinação de $-\pi$ rad por década. Se houver dois pólos por década (o que corresponde a um parâmetro $\alpha=\sqrt{10}$), a inclinação será de -2π rad por década, e por assim adiante; a expressão geral da inclinação *I*, em rad, em função do parâmetro de recursividade α é

$$I=-\frac{\pi}{\log_{10}\alpha} \tag{3.78}$$

Para obter uma inclinação positiva na fase, basta usar zeros em vez de pólos.

As inclinações menores (em módulo) que π rad por década precisariam, para serem implementadas por este modo, de um parâmetro de recursividade tão grande que os pólos ou zeros ficariam suficientemente afastados para o seu efeito na fase não se sobrepor, pelo que esta deixaria de ser praticamente linear e passaria a oscilar sensivelmente. Visto que são essas inclinações as que mais interessam na prática, a solução é empregar um controlador da forma

$$C(s)=\frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{m}1+\frac{s}{\omega_{zj}}}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}1+\frac{s}{\omega_{pi}}}$$
$$\omega_{zj+1}=\eta\omega_{zj},\quad j=1\ldots m-1 \tag{3.79}$$
$$\omega_{pi+1}=\alpha\omega_{pi},\quad i=1\ldots n-1$$

As inclinações induzidas pelos pólos e pelos zeros deverão compensar-se de modo a que a sua diferença seja igual à inclinação pretendida para o controlador. Isto equivale a

$$I=\frac{\pi}{\log_{10}\eta}-\frac{\pi}{\log_{10}\alpha} \tag{3.80}$$

As frequências dos pólos e dos zeros devem cobrir todo o intervalo de frequências de interesse $[\omega_i;\omega_s]$. Os números de zeros e pólos devem ser ajustados em conformidade.

Este controlador só assegura a inclinação da fase; precisa de ser usado em série com um controlador de fase constante para garantir que, na frequência ω_0, a fase tem o valor pretendido.

3.3. IMPLEMENTAÇÃO DISCRETA DUM CONTROLADOR DE ORDEM NÃO INTEIRA

A implementação discreta dum controlador fraccionário pode fazer-se de duas formas:

❖ Discretizando um controlador contínuo por um processo habitual[66]. Este método conduz a cálculos de complexidade notável e pode exigir mais aproximações[67].

❖ Usando uma implementação baseada na definição de Grünwald-Letnikov.

Este segundo método parte da expressão do controlador com derivadas fraccionárias, antes ainda da aproximação por um número finito de pólos e zeros. Serve-se igualmente da expressão (2.51):

$$\begin{aligned} D^{v}y(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k}\binom{v}{k}y(x-kh)}{h^{v}} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{v}}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k}\frac{\Gamma(v-1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(v-k+1)}y(x-kh) \end{aligned} \tag{3.81}$$

Nesta expressão, o intervalo h é aproximado pelo tempo de amostragem T, e o somatório é truncado[68] a um número finito de termos n. Ter-se-á então

$$D^{v}y(t) \approx \left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^{v} y(t) \approx \frac{1}{T^{v}}\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{\Gamma(v-1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(v-k+1)}z^{-k}\right]y(t) \tag{3.82}$$

A expressão é aplicável a qualquer v real. Convém claramente que T seja reduzido e n seja elevado para que a aproximação seja boa.

[66] Os cálculos para o caso dum controlador de fase constante acham-se em Oustaloup (1991), pp. 175-178.

[67] Barbosa (1999), p. 111.

[68] Barbosa (1999), p. 112.

4. A CAIXA DE FERRAMENTAS *NINTEIRO*

Neste capítulo apresenta-se uma caixa de ferramentas para *Matlab*[69] que projecta controladores de ordem não inteira. Na primeira secção apresentam-se as principais características dessa caixa de ferramentas. Na segunda apresenta-se um exemplo exaustivo de utilização.

4.1. CARACTERÍSTICAS

A caixa de ferramentas *ninteiro* é uma caixa de ferramentas de controlo de ordem não inteira para *Matlab* e destina-se a sintetizar controladores de ordem não inteira para sistemas invariantes no tempo, que sejam lineares ou tenham por única não-linearidade um atraso puro, implementando os cálculos expostos no capítulo anterior.

A caixa de ferramentas contém:

❖ funções que permitem conceber controladores dum certo tipo para um dado sistema, sendo fornecidos todos os parâmetros necessários;

❖ uma interface gráfica que guia o utilizador no processo de desenvolvimento dum controlador, pedindo os dados progressivamente e permitindo sempre retroceder para afinar os parâmetros.

Optou-se por enquadrar as funções que calculam os controladores num ambiente gráfico interactivo pelas seguintes razões:

❖ A utilização é mais fácil e intuitiva.

❖ O utilizador é guiado pelos sucessivos passos do desenvolvimento dos controladores.

❖ É fácil voltar atrás para alterar valores.

❖ Existem heurísticas para achar alguns valores. Com uma interface gráfica, o resultado das heurísticas é sempre sugerido, mas pode ser alterado ou ajustado. Sem uma interface gráfica, as opções óbvias seriam obrigar a aceitar o valor da heurística ou não fornecer nenhuma sugestão.

❖ As funções que efectivamente calculam os controladores podem ser chamadas separadamente (da linha de comandos, dum programa ou duma função). Isso é necessário para que o código desenvolvido possa ser reaproveitado com facilidade.

A caixa de ferramentas foi desenvolvida para a versão 5.2.1.1420 do *Matlab*. Os diálogos foram desenvolvidos recorrendo ao ambiente de desenvolvimento de interfaces gráficas do utilizador do *Matlab*, *Guide* (*Graphical User Interface Development Environment*, da caixa de ferramentas *Graphical User Interface Tools*). Para ser usada, esta caixa de ferramentas necessita da *Control System Toolbox*[70] e da *Symbolic Math Toolbox*[71].

Para mais informações sobre a caixa de ferramentas será conveniente consultar a respectiva documentação externa, constituída pelo Manual do Utilizador e pelo Manual do Programador[72]. No resto do capítulo, apresenta-se um exemplo completo de utilização da interface gráfica, que ilustra o seu modo de utilização e permite verificar o seu bom funcionamento.

---

[69] *Matlab* v. 5.2.1.1420, © 1984-1998 The MathWorks, Inc..

[70] *Control System Toolbox*, v. 4.4, 1997/5/17.

[71] *Symbolic Math Toolbox*, v. 2.0.1, 1997/11/21.

[72] Do Apêndice C consta a lista dos ficheiros que fazem parte da caixa de ferramentas.

4.2. EXEMPLO DE UTILIZAÇÃO

Nesta secção apresenta-se um exemplo completo de desenvolvimento de controladores com a interface gráfica. O sistema em estudo é[73]

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+0,2)(s^2+2s+100)} = \frac{s+1}{s^3+2,2s^2+100,4s+20} \tag{4.1}$$

O objectivo é conseguir uma margem de fase de 45º no intervalo de frequências de interesse. Para testar todos os controladores, utilizar-se-ão intervalos de frequências de interesse diferentes. Pretende-se ainda um ganho unitário à frequência de 10 rad/s.

4.2.1. IDENTIFICAÇÃO DO SISTEMA

Para testar o bom funcionamento da opção de identificação, amostra-se o diagrama de Bode do sistema em estudo como se segue:

```
» [gg,ff,ww]=bode(tf([1 1],[1 2.2 100.4 20]),[.1 .4 4 8 10 12]);
» gg=20*log10(squeeze(gg));
» ff=squeeze(ff);
```

Ao escolher as frequências de amostragem teve-se em conta a descida abrupta da fase que ocorre por volta dos 10 rad/s:

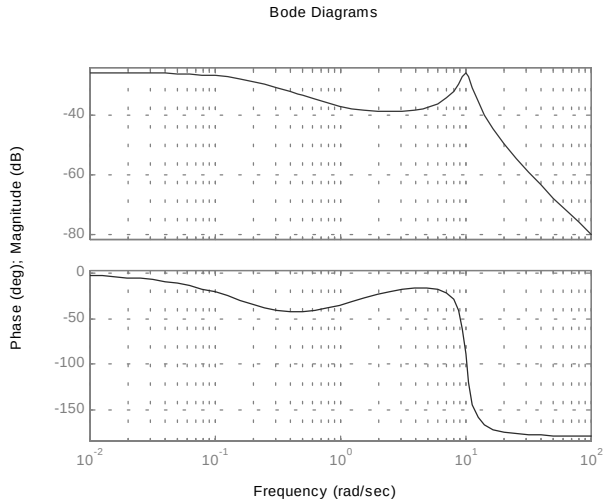

Figura 22 — Diagrama de Bode do sistema em estudo

Invocando na linha de comandos o nome da caixa de ferramentas, *ninteiro*, surge o seguinte diálogo inicial:

[73] Este sistema é usado para demonstração em Oustaloup (1991), pp. 208-209.

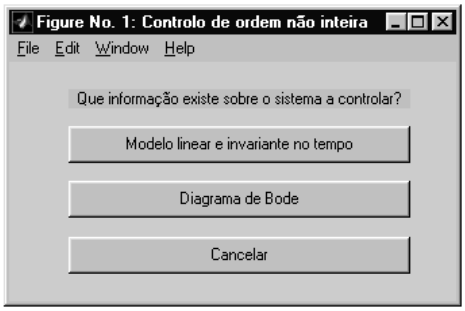
Figure No. 1: Controlo de ordem não inteira
File Edit Window Help
Que informação existe sobre o sistema a controlar?
Modelo linear e invariante no tempo
Diagrama de Bode
Cancelar

Figura 23 — Diálogo inicial

Escolhendo a opção «Diagrama de Bode», surge um outro diálogo, cujos campos se preenchem como se segue:

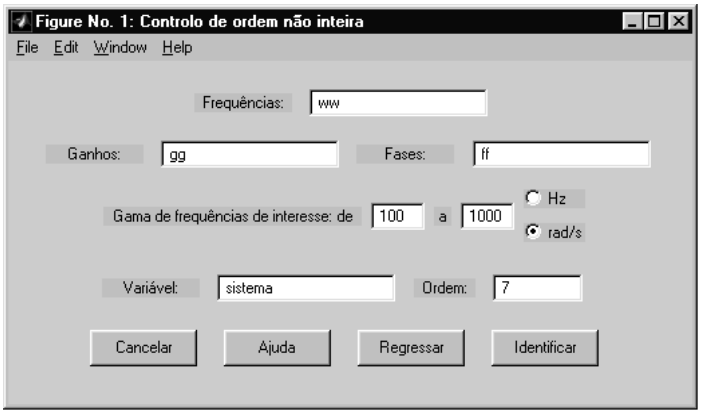

Figura 24 — Preenchimento do primeiro diálogo de identificação dum sistema

A gama de frequências foi escolhida para o diagrama de Bode que vai ser traçado mostrar a zona amostrada. Forneceu-se como ordem do modelo o número de pontos onde o diagrama de Bode foi amostrado; embora o valor seja superior ao do sistema a identificar, a identificação vai ser bem feita:

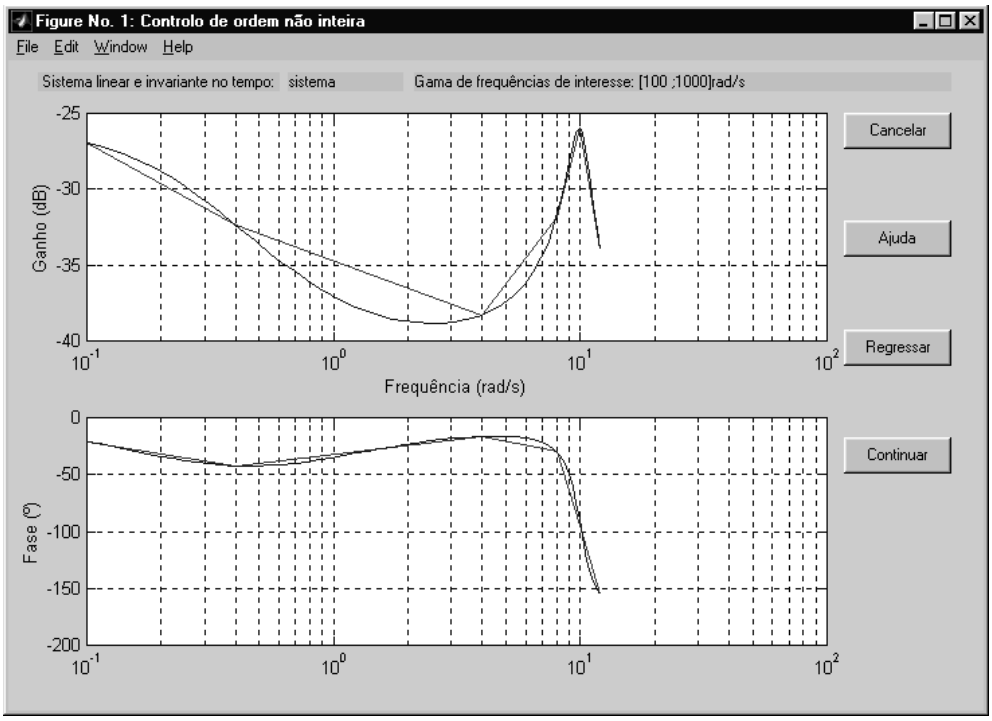

Figura 25 — Sistema identificado

Podiam ter sido também fornecidas as ordens entre 6 e 10: ter-se-ia sempre identificado o sistema correctamente. Ordens superiores a 10 conduziriam a um sistema com demasiados graus de liberdade, e ordens inferiores a 6 conduziriam a um sistema com graus de liberdade a menos: em qualquer dos casos, não teria sido possível identificar nenhum modelo. Também se podiam ter empregue outras frequências no vector *ww*, desde que amostrassem convenientemente a evolução da fase.

Que o sistema encontrado é efectivamente o correcto pode ver-se na linha de comandos:

```
» sistema

Zero/pole/gain:
         (s+1)
-----------------------
(s+0.2) (s^2 + 2s + 100)
```

Carregando em Continuar surge o diálogo seguinte, que se preenche como indicado:

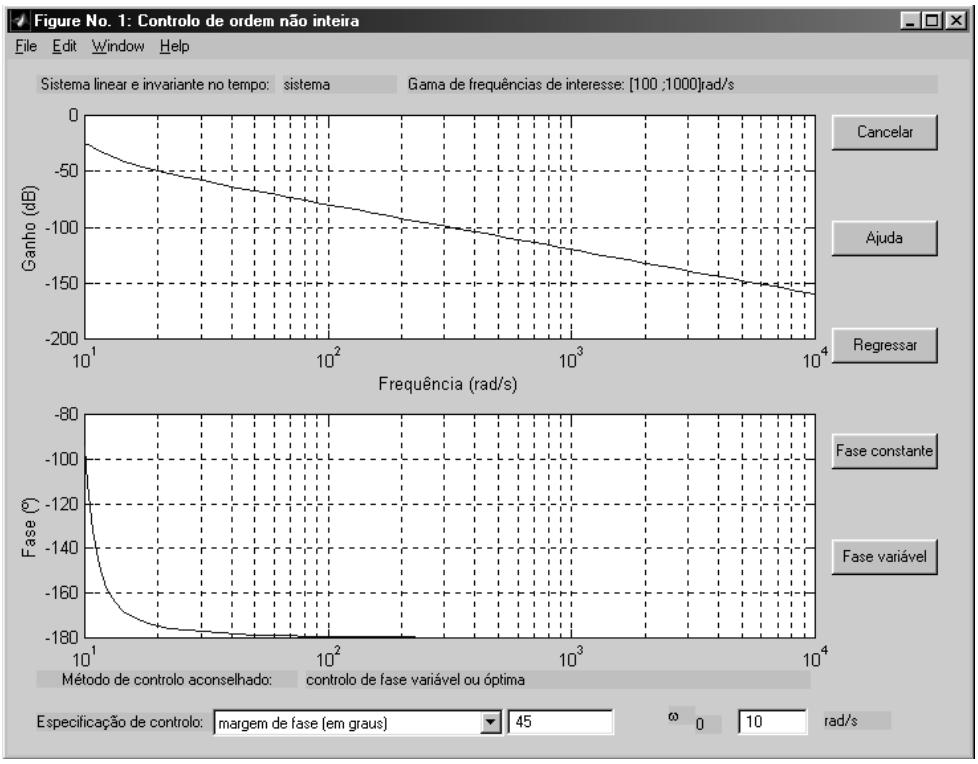

Figura 26 — Diálogo para a escolha dum controlador

4.2.2. CONTROLADOR DE FASE CONSTANTE

Embora o controlador de fase constante seja desaconselhado, isso sucede apenas por causa da variação brusca que a fase sofre por volta de 10 rad/s, uma década abaixo do intervalo de interesse. É portanto razoável escolher aqui um controlador de fase constante. O diálogo respectivo preenche-se como se segue:

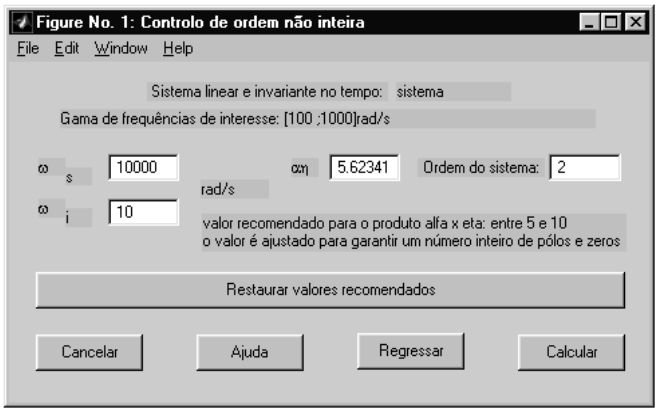
Figure No. 1: Controlo de ordem não inteira
File Edit Window Help
Sistema linear e invariante no tempo: sistema
Gama de frequências de interesse: [100 ;1000]rad/s
10000
rad/s
10
5.62341
Ordem do sistema: 2
valor recomendado para o produto alfa x eta: entre 5 e 10
o valor é ajustado para garantir um número inteiro de pólos e zeros
Restaurar valores recomendados
Cancelar
Ajuda
Regressar
Calcular

Figura 27 — Dados para o cálculo dum controlador de fase constante

O valor de $\alpha\eta$ é o menor possível acima de 5. O controlador projectado conduz ao resultado seguinte:

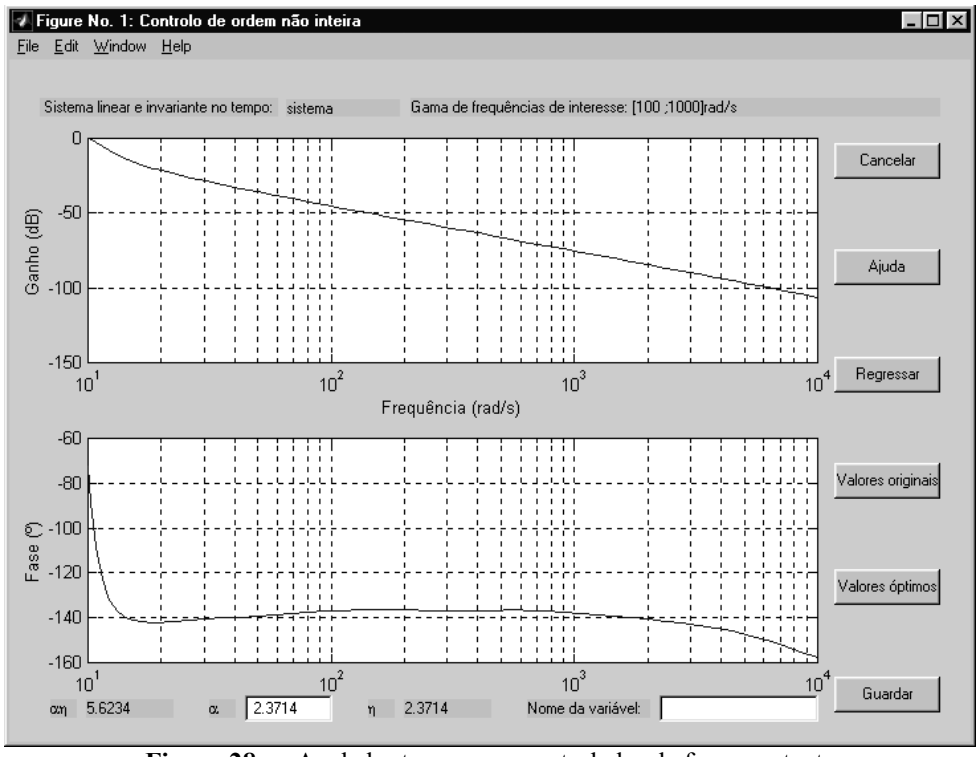

Figura 28 — Anel aberto com um controlador de fase constante

No intervalo de frequências de interesse, a fase varia entre -136,3º e -137,6º. Caso a variação seja excessiva, pode-se carregar no botão que determina o valor óptimo de α. A fase com o novo controlador varia entre -133,6º e -135,2º. Caso este desempenho ainda não satisfaça, pode-se regressar ao diálogo anterior e aumentar a amplitude do intervalo ou diminuir o valor de $\alpha\eta$.

4.2.3. CONTROLADOR DE FASE VARIÁVEL

Carregando três vezes no botão Regressar, pode-se alterar o intervalo de frequências de interesse:

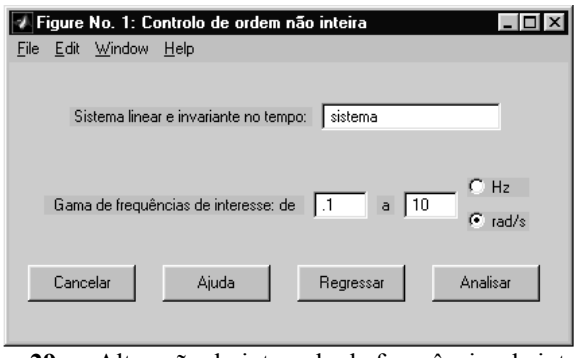

Figura 29 — Alteração do intervalo de frequências de interesse

Neste intervalo as variações da fase tornam patente que só um controlador de fase variável ou um controlador de fase óptima poderão conseguir um desempenho satisfatório. Carregando em Continuar e optando agora por um controlador de fase variável, chega-se ao seguinte diálogo:

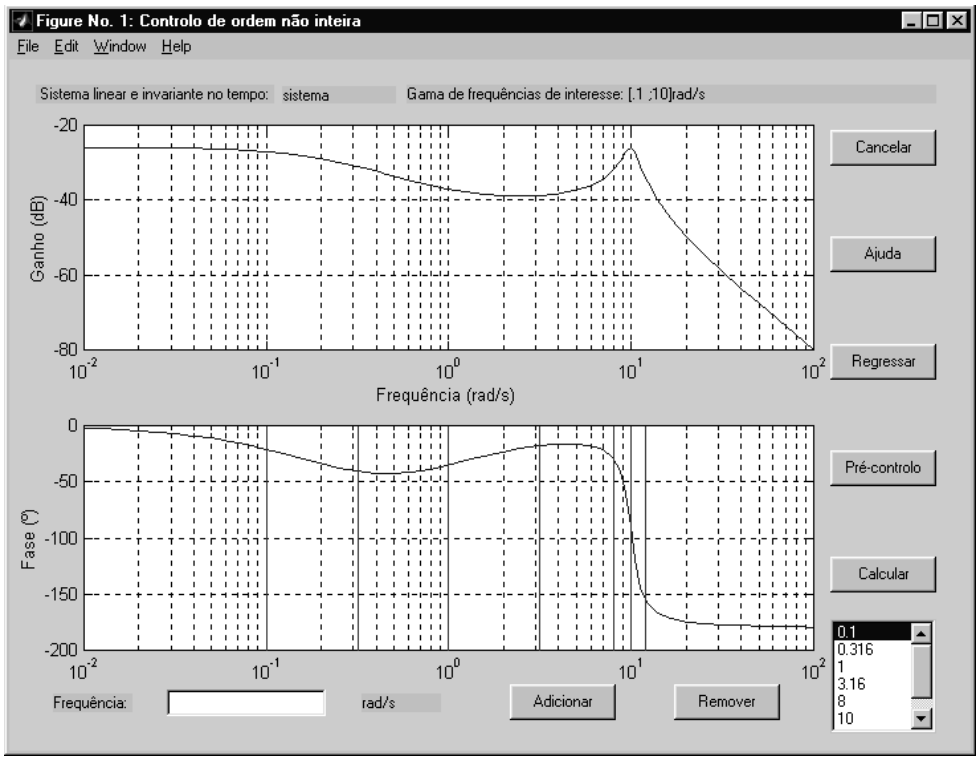

Figura 30 — Selecção das frequências de amostragem da fase para um controlador de fase variável

A lista de frequências de amostragem da fase da figura foi obtida a partir da lista que é gerada automaticamente quando o diálogo surge pela primeira vez removendo, com o botão Remover, as frequências mais extremas, e adicionando, com o botão Adicionar, mais algumas (8 rad/s e 12 rad/s) para amostrar melhor a zona em torno de 10 rad/s. O controlador calculado consegue o seguinte desempenho:

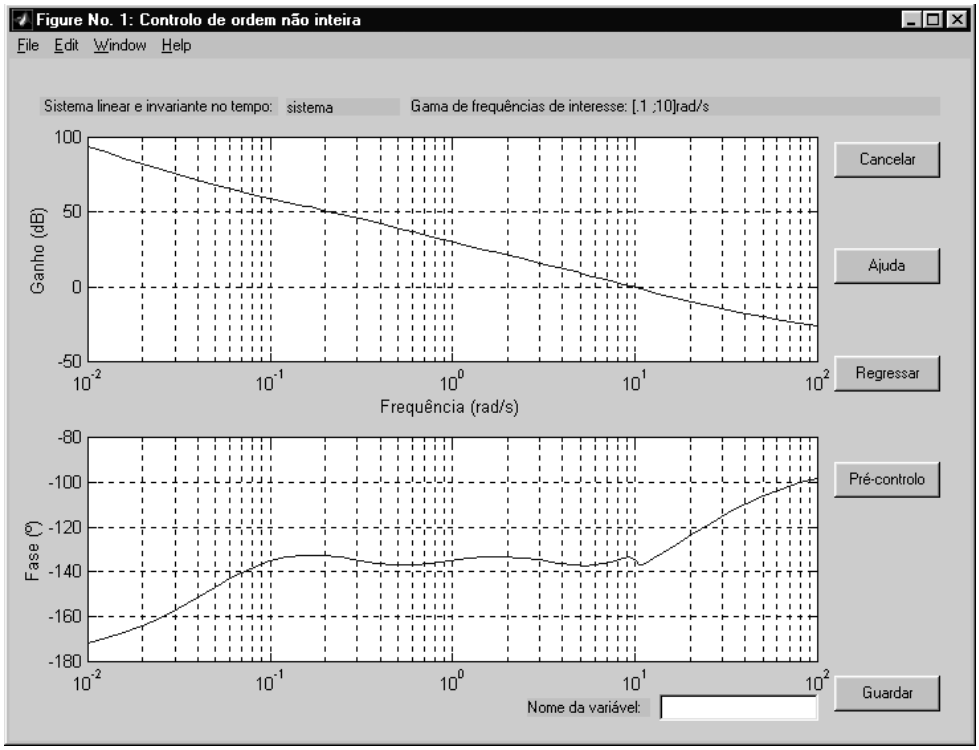

Figura 31 — Anel aberto com um controlador de fase variável

No intervalo de frequências de interesse a fase varia entre -132,4º e -137,1º. Caso a variação seja excessiva, deve-se aumentar o número de pontos de amostragem no diálogo anterior, mas com prudência, para não aumentar de forma exagerada a complexidade dos cálculos. Outra hipótese é optar por pré-controlar o sistema. O diálogo correspondente preenche-se do seguinte modo:

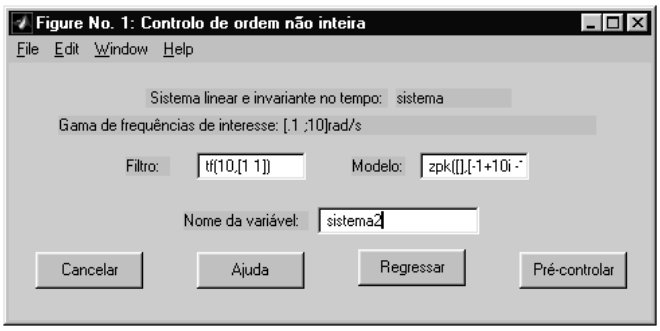

Figura 32 — Pré-controlo do sistema

No diálogo anterior, introduzem-se o filtro e o modelo pretendidos. O sistema a controlar passará a ser o do anel de pré-controlo:

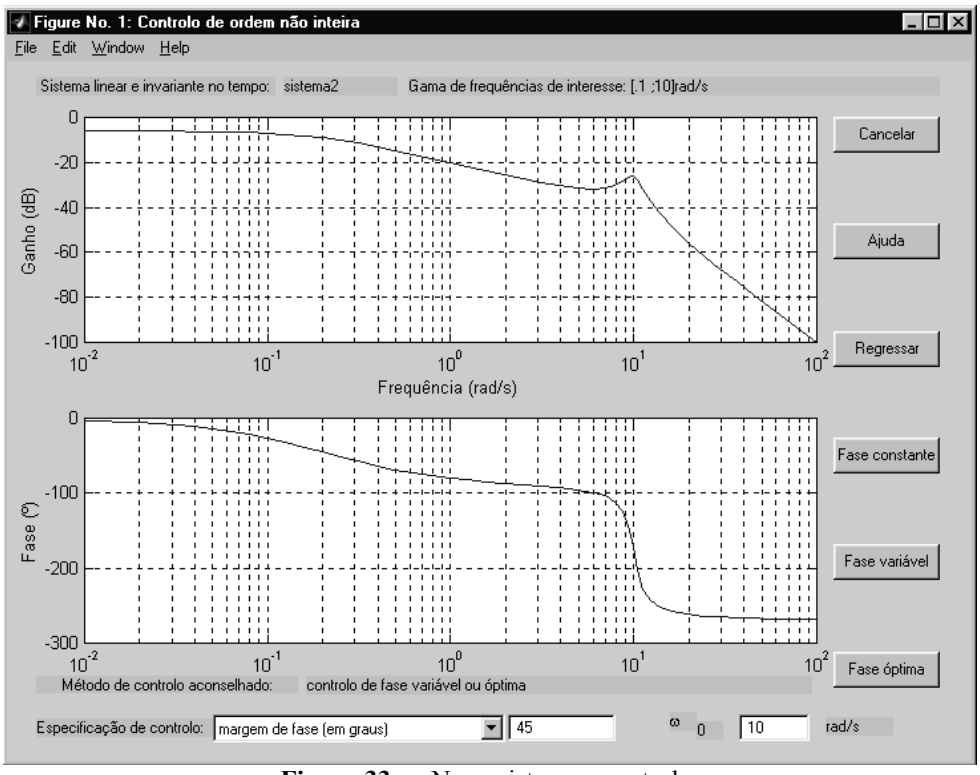

Figura 33 — Novo sistema a controlar

4.2.4. CONTROLADOR DE FASE ÓPTIMA

Restaurando no diálogo da Figura 29 o sistema original a controlar e o intervalo original de frequências a controlar, vai-se agora optar por um controlador de fase óptima. Para isso é preciso alterar a especificação de desempenho no diálogo da Figura 26, visto que a margem de fase vai ser variável. Especificando um ganho de ressonância

em anel fechado de 1,2 e optando por um controlador de fase variável, chega-se ao seguinte diálogo:

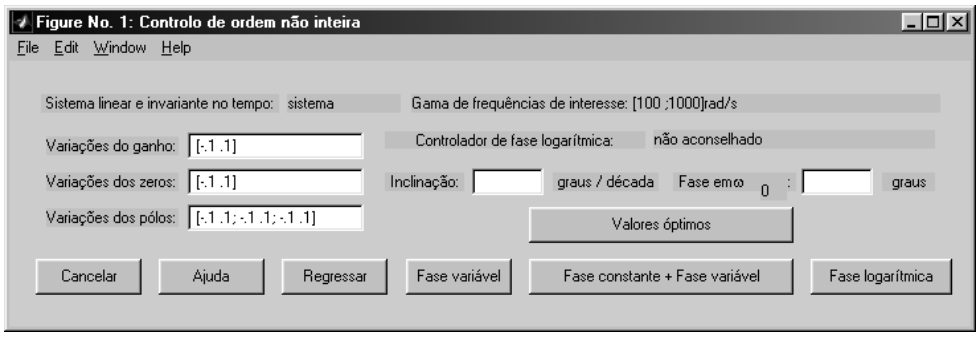
Figure No. 1: Controlo de ordem não inteira
File Edit Window Help
Sistema linear e invariante no tempo: sistema
Gama de frequências de interesse: [100 ;1000]rad/s
Variações do ganho: [-.1 .1]
Controlador de fase logarítmica: não aconselhado
Variações dos zeros: [-.1 .1]
Inclinação: graus / década
Fase em ω 0 : graus
Variações dos pólos: [-.1 .1; -.1 .1; -.1 .1]
Valores óptimos
Cancelar
Ajuda
Regressar
Fase variável
Fase constante + Fase variável
Fase logarítmica

Figura 34 — Determinação da inclinação óptima

Os campos preenchidos têm as incertezas que se sabe poderem ter sido cometidas na identificação do modelo; por uma questão de simplicidade assume-se que a incerteza é sempre de ±0,1. Carregando no botão Valores óptimos, e após cálculos demorados, surgem nos campos respectivos a inclinação de 16º por década e a fase em ω_0 de 120º.

Optando por um controlador óptimo de fase variável, surge o seguinte diálogo:

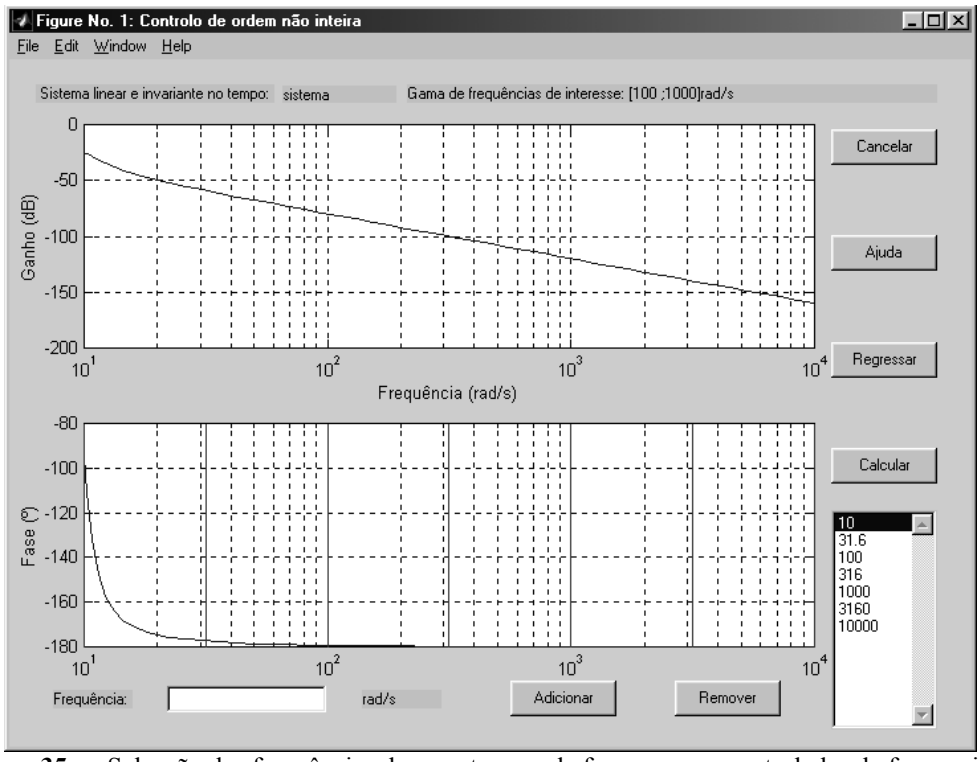

Figura 35 — Selecção das frequências de amostragem da fase para um controlador de fase variável óptima

Neste caso é conveniente manter as frequências determinadas automaticamente. (Se todos os controladores aqui apresentados forem calculados sucessivamente, no diálogo surgirão uma vez mais as frequências da Figura 30. A solução é fechar o programa, carregando em Cancelar, e abri-lo outra vez, ou então adicionar e remover as frequências necessárias.)

O controlador projectado tem o seguinte desempenho:

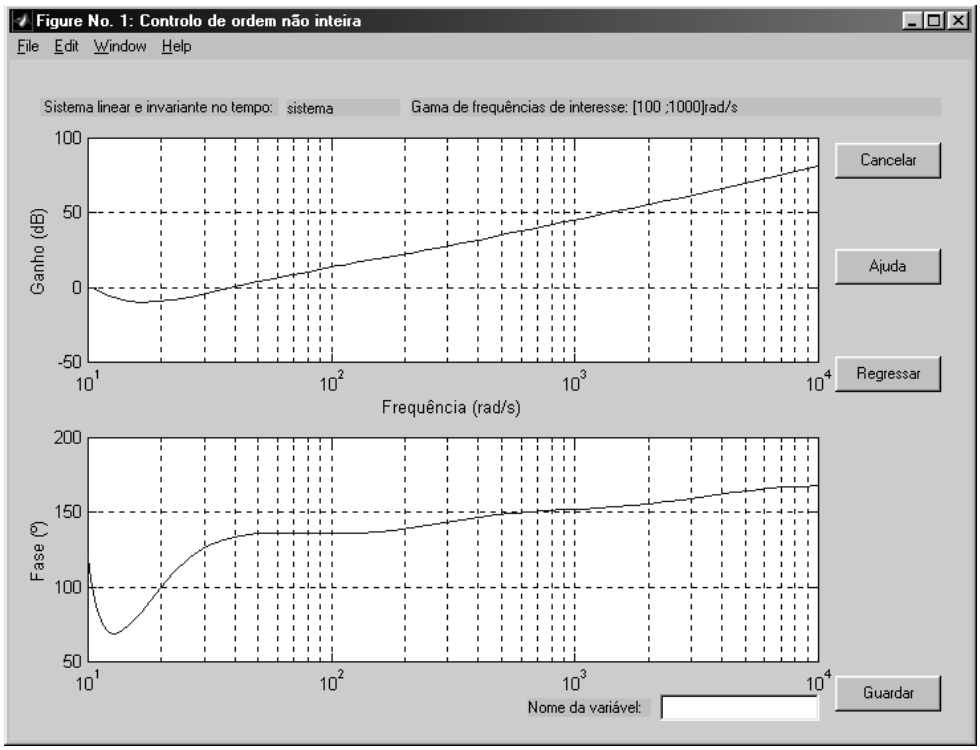

Figura 36 — Anel aberto com um controlador de fase variável óptima

Caso as oscilações da fase sejam excessivas (repare-se que a maior oscilação se dá ainda fora do intervalo de frequências de interesse), há que aumentar o número de pontos de amostragem no diálogo anterior.

Optando, na Figura 34, por um controlador formado pela sequência dum controlador de fase constante e dum controlador de fase variável, chega-se ao seguinte diálogo:

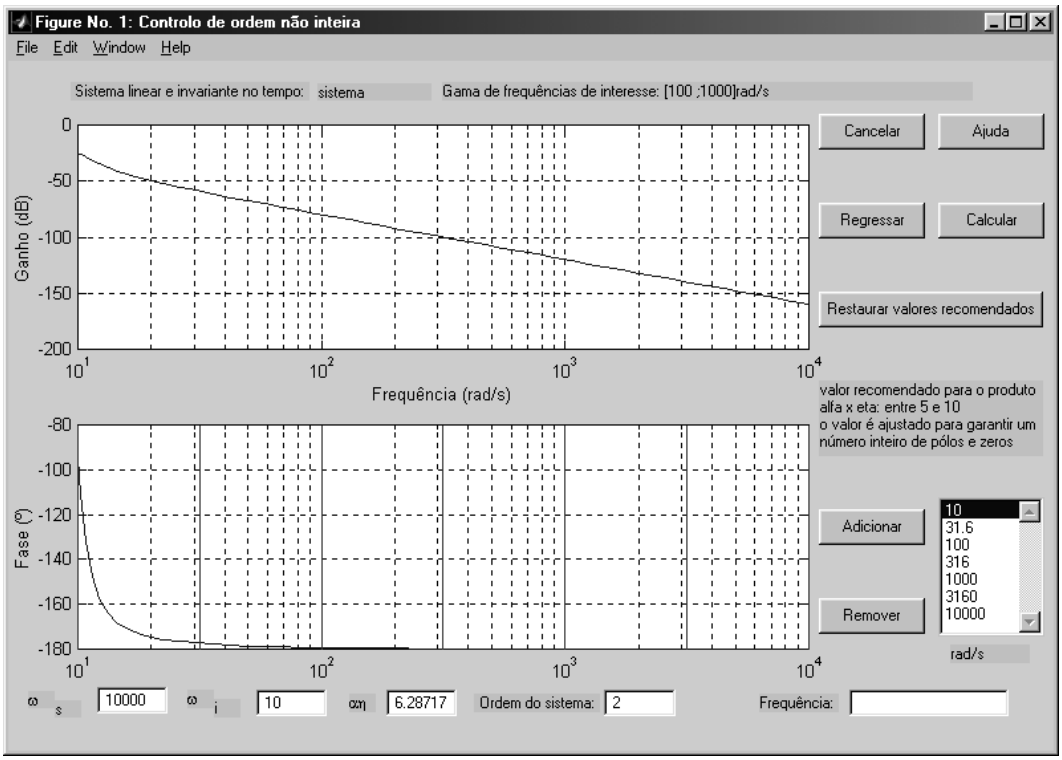

Figura 37 — Selecção das frequências de amostragem da fase para um controlador de fase constante e variável óptima

O controlador assim concebido tem o seguinte desempenho:

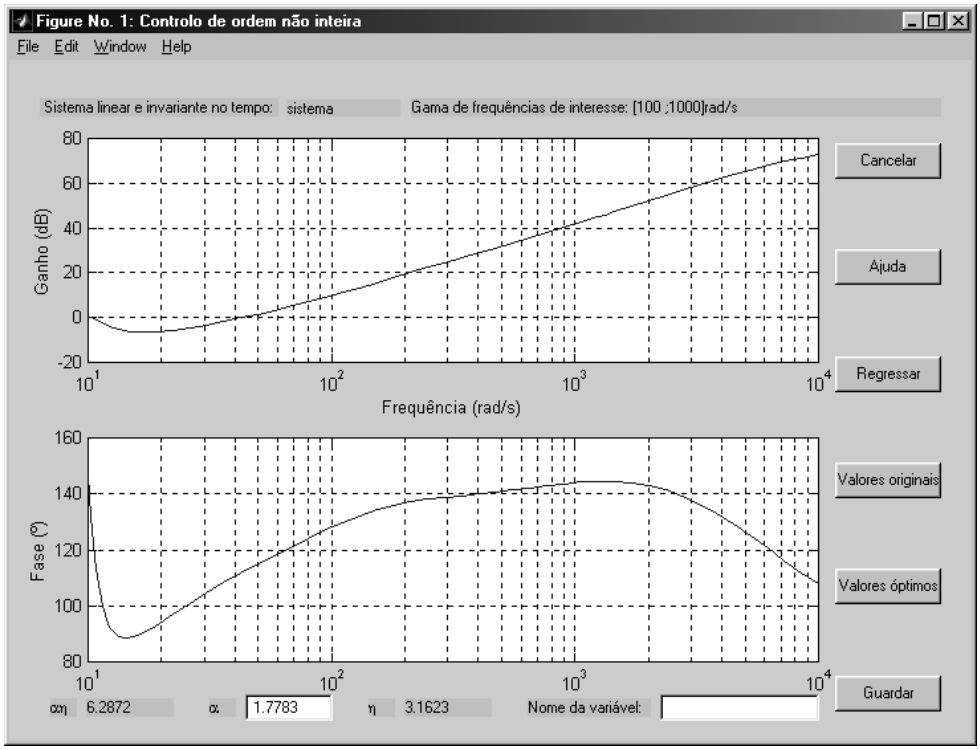

Figura 38 — Anel aberto com um controlador de fase constante e variável óptima

É possível uma melhoria significativa de desempenho alargando o intervalo $[\omega_i;\omega_s]$ no diálogo anterior.

O controlador de fase logarítmica não é aconselhado apenas porque a fase varia muito logo no princípio da década abaixo do intervalo de frequências de interesse. Dentro deste último, contudo, é praticamente constante, pelo que pode ser uma boa escolha para este caso. Optando, na Figura 34, por um controlador de fase logarítmica, chega-se ao seguinte diálogo:

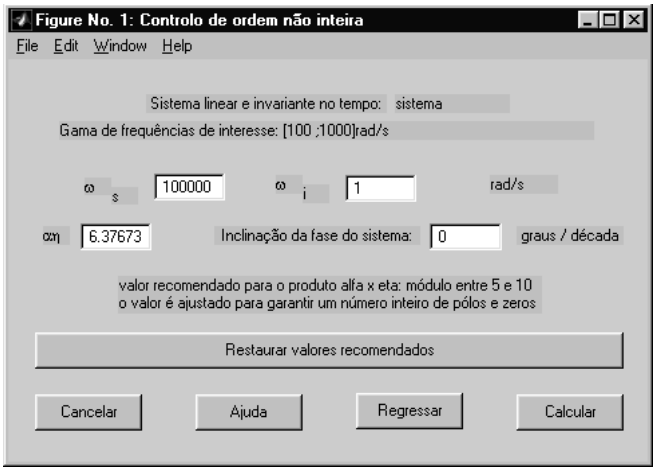
Figure No. 1: Controlo de ordem não inteira
File Edit Window Help
Sistema linear e invariante no tempo: sistema
Gama de frequências de interesse: [100 ;1000]rad/s
ω s 100000 ω i 1 rad/s
αη 6.37673 Inclinação da fase do sistema: 0 graus / década
valor recomendado para o produto alfa x eta: módulo entre 5 e 10
o valor é ajustado para garantir um número inteiro de pólos e zeros
Restaurar valores recomendados
Cancelar
Ajuda
Regressar
Calcular

Figura 39 — Dados para o cálculo dum controlador de fase logarítmica

Convém, como se vê na figura, alargar o intervalo em que o controlador vai ser concebido. Uma década para cada lado é, pelo menos neste caso, insuficiente. Convém também corrigir a inclinação da fase do sistema para 0º. O valor calculado leva em conta a variação da fase por volta dos 10 rad/s, e é manifestamente negativo demais, visto que no intervalo de frequências de interesse a fase é praticamente constante. O desempenho deste controlador é o seguinte:

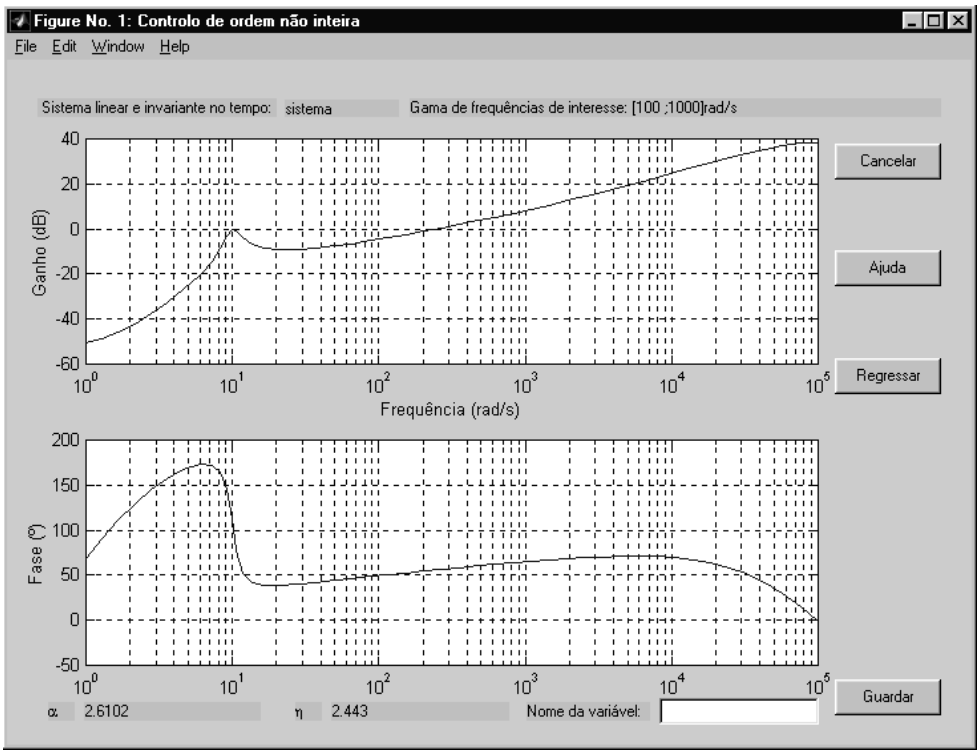

Figura 40 — Anel aberto com um controlador de fase logarítmica óptima

5. DESEMPENHO DOS CONTROLADORES DE ORDEM NÃO INTEIRA

Neste capítulo estuda-se a aplicação do controlo de ordem não inteira a um caso paradigmático onde já foi aplicado com sucesso e a um sistema laboratorial a ele semelhante. Inclui duas secções. Na primeira descrevem-se o problema paradigmático de controlo, a sua modelação, a sua identificação, as especificações de desempenho, o processo de desenvolvimento do controlador de ordem não inteira e o seu desempenho no tempo e na frequência. Na segunda descrevem-se o sistema implementado no laboratório, a sua modelação, a sua identificação, o processo de desenvolvimento de controladores de ordem não inteira para esse sistema e o seu desempenho no tempo e na frequência.

O desempenho dos controladores de ordem não inteira é sempre comparado com o de controladores PID para se poder avaliar os méritos e defeitos de cada um. Escolheram-se controladores PID como termo de comparação por serem controladores clássicos de grande simplicidade, de bom desempenho em inúmeros casos e muito divulgados, sobretudo em aplicações industriais.

5.1. PROBLEMA PARADIGMÁTICO DE CONTROLO

Este problema paradigmático de controlo foi apresentado na Conferência Europeia de Controlo de 1995, em Roma[74]. Neste problema pretende-se controlar um sistema constituído por três roldanas, ligadas duas a duas por correias flexíveis. Na terceira roldana pode-se impor uma carga fixando discos de massa variável. A entrada do sistema é a posição angular da primeira roldana, que é controlada localmente por meio de um motor de corrente contínua e de um controlador por realimentação. A saída do sistema é a posição angular da terceira roldana.

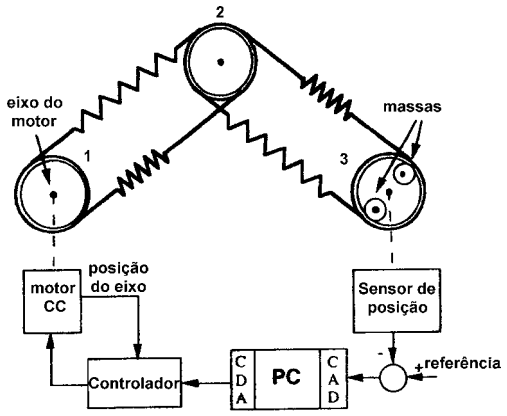

Figura 41 — Sistema a controlar (adaptada de Landau *et al.* 1995)

[74] Kwakernaak (1995), pp. 42-47; Landau *et al.* (1995), pp. 77-78; Landau (1997), pp. 28-32.

5.1.1. MODELAÇÃO DO SISTEMA

Este sistema pode modelar-se por meio das equações de Lagrange. Sejam as roldanas 1, 2 e 3 as que constam da Figura 41; e sejam:

- θ_1, θ_2 e θ_3 as posições angulares das três roldanas;
- r_1, r_2 e r_3 os raios das três roldanas;
- I_1, I_2 e I_3 os momentos de inércia das três roldanas;
- b_1, b_2 e b_3 os coeficientes de atrito das três roldanas no seu eixo;
- k_{12} e k_{23} as constantes de elasticidade das correias que unem as duas primeiras e as duas últimas roldanas, respectivamente;
- M_1 o momento aplicado na primeira roldana pelo motor.

Então, a energia cinética do sistema será:

$$U = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\theta}_3^2 \tag{5.1}$$

A energia potencial do sistema será:

$$T = \frac{1}{2} k_{12} \left(\theta_2 r_2 - \theta_1 r_1\right)^2 + \frac{1}{2} k_{23} \left(\theta_3 r_3 - \theta_2 r_2\right)^2 \tag{5.2}$$

A energia dissipada por atrito será:

$$J = \frac{1}{2} b_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} b_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} b_3 \dot{\theta}_3^2 \tag{5.3}$$

Derivando em ordem à variável θ_1, vem

$$\frac{\partial\left(U-T\right)}{\partial \dot{\theta}_1} = I_1 \dot{\theta}_1 \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial\left(U-T\right)}{\partial \dot{\theta}_1} = I_1 \ddot{\theta}_1 \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial\left(U-T\right)}{\partial \theta_1} = -k_{12}\left(\theta_2 r_2 - \theta_1 r_1\right)\left(-r_1\right) \tag{5.5}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \dot{\theta}_1} = b_1 \dot{\theta}_1 \tag{5.6}$$

o que conduz à equação

$$I_1 \ddot{\theta}_1 + k_{12} r_1^2 \theta_1 - k_{12} r_1 r_2 \theta_2 + b_1 \dot{\theta}_1 = M_1 \tag{5.7}$$

Derivando em ordem à variável θ_2, vem

$$\frac{\partial\left(U-T\right)}{\partial \dot{\theta}_2} = I_2 \dot{\theta}_2 \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial\left(U-T\right)}{\partial \dot{\theta}_2} = I_2 \ddot{\theta}_2 \tag{5.8}$$

$$\frac{\partial(U-T)}{\partial\theta_2} = -k_{12}\left(\theta_2 r_2 - \theta_1 r_1\right) r_2 - k_{23}\left(\theta_3 r_3 - \theta_2 r_2\right)\left(-r_2\right) \tag{5.9}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \dot{\theta}_2} = b_2 \dot{\theta}_2 \tag{5.10}$$

o que conduz à equação

$$I_2\ddot{\theta}_2 - k_{12} r_1 r_2 \theta_1 + \left(k_{12} + k_{23}\right) r_2^2 \theta_2 - k_{23} r_2 r_3 \theta_3 + b_2 \dot{\theta}_2 = 0 \tag{5.11}$$

Derivando em ordem à variável θ_3, vem

$$\frac{\partial(U-T)}{\partial\dot{\theta}_3} = I_3\dot{\theta}_3 \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial(U-T)}{\partial\dot{\theta}_3} = I_3\ddot{\theta}_3 \tag{5.12}$$

$$\frac{\partial(U-T)}{\partial\theta_2} = -k_{23}\left(\theta_3 r_3 - \theta_2 r_2\right) r_3 \tag{5.13}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \dot{\theta}_3} = b_3 \dot{\theta}_3 \tag{5.14}$$

o que conduz à equação

$$I_3\ddot{\theta}_3 - k_{23} r_2 r_3 \theta_2 + k_{23} r_3^2 \theta_3 + b_3 \dot{\theta}_3 = 0 \tag{5.15}$$

Aplicando transformadas de Laplace às três equações, chega-se ao sistema

$$\begin{cases} \left(I_1 s^2 + b_1 s + k_{12} r_1^2\right)\Theta_1 - k_{12} r_1 r_2 \Theta_2 = M_1 \\ -k_{12} r_1 r_2 \Theta_1 + \left[I_2 s^2 + b_2 s + \left(k_{12} + k_{23}\right) r_2^2\right]\Theta_2 - k_{23} r_2 r_3 \Theta_3 = 0 \\ -k_{23} r_2 r_3 \Theta_2 + \left(I_3 s^2 + b_3 s + k_{23} r_3^2\right)\Theta_3 = 0 \end{cases} \tag{5.16}$$

Para simplificar a notação, define-se

$$\Upsilon = I_1 s^2 + b_1 s + k_{12} r_1^2 \quad \text{(termo de segunda ordem)} \tag{5.17}$$

$$\Phi = -k_{12} r_1 r_2 \quad \text{(constante)} \tag{5.18}$$

$$\mathrm{X} = I_2 s^2 + b_2 s + \left(k_{12} + k_{23}\right) r_2^2 \quad \text{(termo de segunda ordem)} \tag{5.19}$$

$$\Psi = -k_{23} r_2 r_3 \quad \text{(constante)} \tag{5.20}$$

$$\Omega = I_3 s^2 + b_3 s + k_{23} r_3^2 \quad \text{(termo de segunda ordem)} \tag{5.21}$$

Isto permite escrever

$$\begin{cases} \Upsilon\Theta_1 + \Phi\Theta_2 = M_1 \\ \Phi\Theta_1 + \mathrm{X}\Theta_2 + \Psi\Theta_3 = 0 \\ \Psi\Theta_2 + \Omega\Theta_3 = 0 \end{cases} \tag{5.22}$$

A primeira equação não é necessária para a modelação deste sistema, mas foi aqui deduzida porque será necessária na secção seguinte.

A partir das duas últimas equações, tem-se

$$\begin{cases} \Phi\Theta_1 + X\Theta_2 + \Psi\Theta_3 = 0 \\ \Psi\Theta_2 + \Omega\Theta_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi\Theta_1 + X\Theta_2 - \dfrac{\Psi^2}{\Omega}\Theta_2 = 0 \\ \Theta_3 = -\dfrac{\Psi}{\Omega}\Theta_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Theta_2 = \dfrac{\Phi}{\dfrac{\Psi^2}{\Omega} - X}\Theta_1 \\ \Theta_3 = -\dfrac{\Psi}{\Omega}\cdot\dfrac{\Phi}{\dfrac{\Psi^2}{\Omega} - X}\Theta_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\Theta_3}{\Theta_1} = \frac{\Psi\Phi}{X\Omega - \Psi^2} \tag{5.23}$$

Esta expressão mostra desde já que o numerador da função de transferência é constante, pelo que o sistema não tem zeros; e que o denominador é um polinómio de quarta ordem, pelo que o sistema tem quatro pólos.

Substituindo chega-se a[75]

$$\frac{\Theta_3}{\Theta_1} = \frac{A}{Bs^4 + Cs^3 + Ds^2 + Es + F} \tag{5.24}$$

$$A = k_{12}k_{23}r_1r_2^2r_3$$
$$B = I_2I_3$$
$$C = I_2b_3 + b_2I_3$$
$$D = I_2k_{23}r_3^2 + \left(k_{12} + k_{23}\right)r_2^2I_3 + b_2b_3$$
$$E = b_2k_{23}r_3^2 + \left(k_{12} + k_{23}\right)r_2^2b_3$$
$$F =_1 k_{12}r_2^2k_{23}r_3^2$$

5.1.2. IDENTIFICAÇÃO DO SISTEMA

Foram identificados três modelos para o sistema[76], todos discretos, correspondendo a três situações diferentes: uma em que a massa ligada à terceira roldana é nula, outra em que é metade da máxima, e outra em que é máxima. Eis os modelos identificados:

$$S_{sc}(z) = \frac{0,50666z^{-4} + 0,28261z^{-3}}{0,88642z^{-4} - 1,31608z^{-3} + 1,58939z^{-2} - 1,41833z^{-1} + 1} \tag{5.25}$$

$$S_{mc}(z) = \frac{0,18123z^{-4} + 0,10276z^{-3}}{0,89413z^{-4} - 1,84083z^{-3} + 2,20265z^{-2} - 1,99185z^{-1} + 1} \tag{5.26}$$

[75] Kwakernaak (1995), p. 46. Note-se que este autor define as grandezas físicas de modo diferente.
[76] Vejam-se as referências da nota 74.

$$S_{pc}(z) = \frac{0{,}10407z^{-4} + 0{,}06408z^{-3}}{0{,}87129z^{-4} - 1{,}93353z^{-3} + 2{,}31962z^{-2} - 2{,}09679z^{-1} + 1} \tag{5.27}$$

O tempo de amostragem usado com o sistema foi de $T_s = 0{,}05\,\mathrm{s}$ (correspondente a uma frequência de amostragem de 20 Hz).

Eis os diagramas de Bode correspondentes:

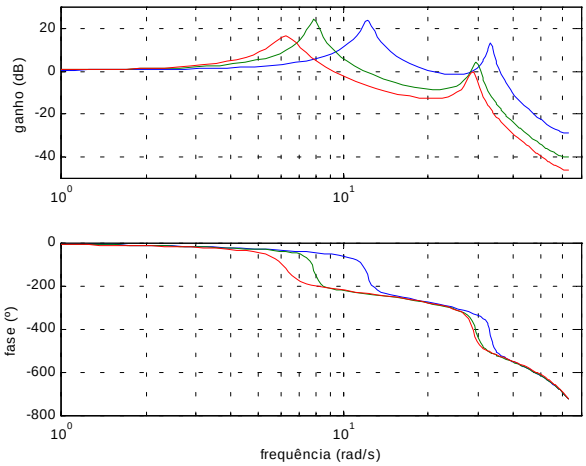

Figura 42 — Diagramas de Bode do sistema a controlar: a azul, sistema sem carga; a verde, sistema a carga média; a vermelho, sistema a plena carga

Como se vê, este sistema é caracterizado por ter duas frequências de ressonância com coeficientes de amortecimento reduzidos. Ao variar a carga na terceira roldana, as frequências de amortecimento variam.

Usando a transformação de Tustin

$$z = \frac{1 + \frac{st}{2}}{1 - \frac{st}{2}} \tag{5.28}$$

com $t = T_s$, os três modelos acima apresentados podem ser transformados em três modelos contínuos no tempo, cujos parâmetros podem ser aproximados por[77]

$$S(s) = \frac{N_0(s)}{D_0(s) + pE(s)} \tag{5.29}$$
$$N_0(s) = 0{,}013209s^4 - 3{,}5699s^3 + 301{,}58s^2 - 10373s + 127029$$
$$D_0(s) = 1{,}3913s^4 + 5{,}5122s^3 + 1947{,}8s^2 + 1957{,}9s + 119577$$
$$E(s) = s^4 + 4{,}0619s^3 + 1122{,}88s^2 + 1245{,}8s$$

onde p assume os valores

[77] Para pormenores veja-se Kwakernaak (1995), pp. 45-47. Repare-se que o modelo a que se chega tem zeros, embora na modelação não tenha.

sistema sem carga	$p = -1$
sistema a média carga	$p = 0{,}11179$
sistema a plena carga	$p = 1$

Tabela 1 — Valores de p na expressão (5.29)

5.1.3. ESPECIFICAÇÕES DE DESEMPENHO

As especificações de desempenho pressupõem o anel de controlo da Figura 15 e são as seguintes[78]:

❖ O tempo de subida de 0% a 90% do valor final dum degrau deve ser menor que 1 s.

❖ O sobreimpulso na resposta a um degrau deve ser menor que 10%.

❖ As perturbações devem ser rejeitadas em 1,2 s. Uma perturbação considera-se rejeitada quando a saída recupera para 10% do valor extremo a que chegou causado pela perturbação.

❖ As perturbações constantes devem ser rejeitadas.

❖ O valor máximo da função de sensibilidade da saída, isto é, a função de transferência entre $p(t)$ e $y(t)$, deve ser menor que 6 dB.

❖ As perturbações de 0 Hz a 0,2 Hz devem ser atenuadas; isto é, nessas frequências a função de transferência entre $p(t)$ e $y(t)$ deve ser menor que 0 dB.

❖ A margem de atraso, isto é, o atraso adicional que instabiliza o sistema[79], deve ser superior a 40 ms.

❖ A função de sensibilidade da entrada, isto é, a função de transferência entre $p(t)$ e $u(t)$, deve ser inferior a 10 dB nas frequências entre 8 Hz e 10 Hz.

5.1.4. CONTROLO DA POSIÇÃO

Todas as simulações desta subsecção foram levadas a cabo com a caixa de ferramentas *Simulink*[80] para *Matlab*.

5.1.4.1. DESENVOLVIMENTO DOS CONTROLADORES

O controlador que melhor desempenho apresentou foi concebido usando o modelo a média carga; é um controlador de fase óptima, projectado para assegurar um ganho de ressonância em anel fechado de 1,05 (embora as modificações posteriores tenham aumentado esse valor, como se verá). As frequências empregues para o seu cálculo, seleccionadas por tentativa e erro de acordo com as heurísticas referidas na subsecção 3.1.3.4.1, foram de 0,1 rad/s, 1 rad/s, 7 rad/s, 8 rad/s, 10 rad/s, 30 rad/s, 34 rad/s, 36

[78] Kwakernaak (1995), pp. 43-44; Landau *et al.* (1995), pp. 79-80.

[79] Prova-se que o atraso adicional que instabiliza o sistema $\Delta\tau$ é igual à razão entre a margem de fase Φ_m e a frequência de cruzamento de ganho ω_{Φ_m}: $\Delta\tau = \frac{\Phi_m}{\omega_{\Phi_m}}$. Havendo várias frequências de ganho, ter-se-á $\Delta\tau = \min_i \frac{\Phi_{mi}}{\omega_{\Phi_{mi}}}$. Veja-se Landau *et al.* (1995), p. 80.

[80] *Simulink* v. 3.0, © 1984-1998 The MathWorks, Inc..

rad/s e 100 rad/s; foram escolhidas para amostrar o comportamento do sistema em todo o intervalo [0,1; 100] rad/s; são mais esparsas no extremo esquerdo do intervalo, onde a fase é quase constante, e concentram-se em torno das duas inflexões que se dão entre 7 rad/s e 10 rad/s e entre 30 e 36 rad/s.

Eis a sua função de transferência:

$$C_S = \frac{13{,}174\left(s+8{,}604\right)\left(s^2+0{,}9797s+60\right)\left(s^2+54{,}03s+1492\right)\left(s^2+2{,}943s+1320\right)}{\left(s+0{,}01672\right)\left(s+1{,}574\right)\left(s+100\right)^5} \tag{5.30}$$

Os pólos em –100 rad/s foram adicionados para tornar a função de transferência fisicamente realizável. O ganho foi ajustado por tentativa e erro para conseguir os melhores resultados.

Foram calculados controladores PID para cada um dos três modelos. O cálculo foi feito pelo segundo método de Ziegler-Nichols[81]; o ajuste fino dos parâmetros foi feito por tentativa e erro.

Para o sistema sem carga, os seus valores são:

$$\begin{aligned} P &= 0{,}001 \\ I &= 3{,}1 \\ D &= 0{,}04 \end{aligned} \tag{5.31}$$

Para o sistema a média carga, os seus valores são:

$$\begin{aligned} P &= 0{,}2 \\ I &= 3 \\ D &= 0{,}1 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Para o sistema a plena carga, os seus valores são:

$$\begin{aligned} P &= 0{,}3 \\ I &= 2{,}7 \\ D &= 0{,}15 \end{aligned} \tag{5.33}$$

5.1.4.2. SEGUIMENTO DE UM DEGRAU E REJEIÇÃO DE PERTURBAÇÕES

Aplicou-se como sinal de teste um degrau unitário, como é requerido pelas especificações. Usou-se como perturbação[82] um degrau de amplitude –0,1.

Nenhum dos controladores PID desenvolvidos conseguiu controlar o sistema nas três situações, como se vê pelas Figuras seguintes.

[81] Ogata (1997), pp. 672-673.

[82] Foi esta a perturbação usada em Oustaloup *et al.* (1995), p. 118.

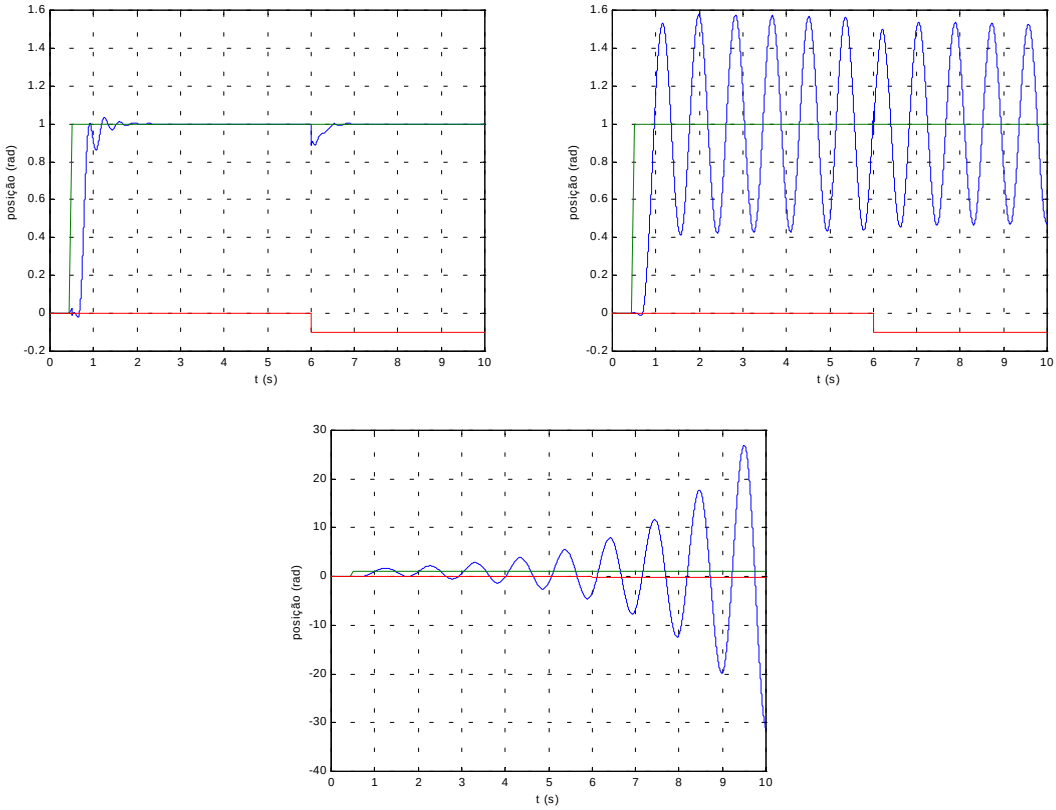

Figura 43 — Saída do sistema (a azul), controlado com o PID projectado para o sistema sem carga, aquando do seguimento de um degrau (a verde), tendo sido aplicada uma perturbação (a vermelho): à esquerda, sistema sem carga; à direita, sistema a média carga; ao fundo, sistema a plena carga

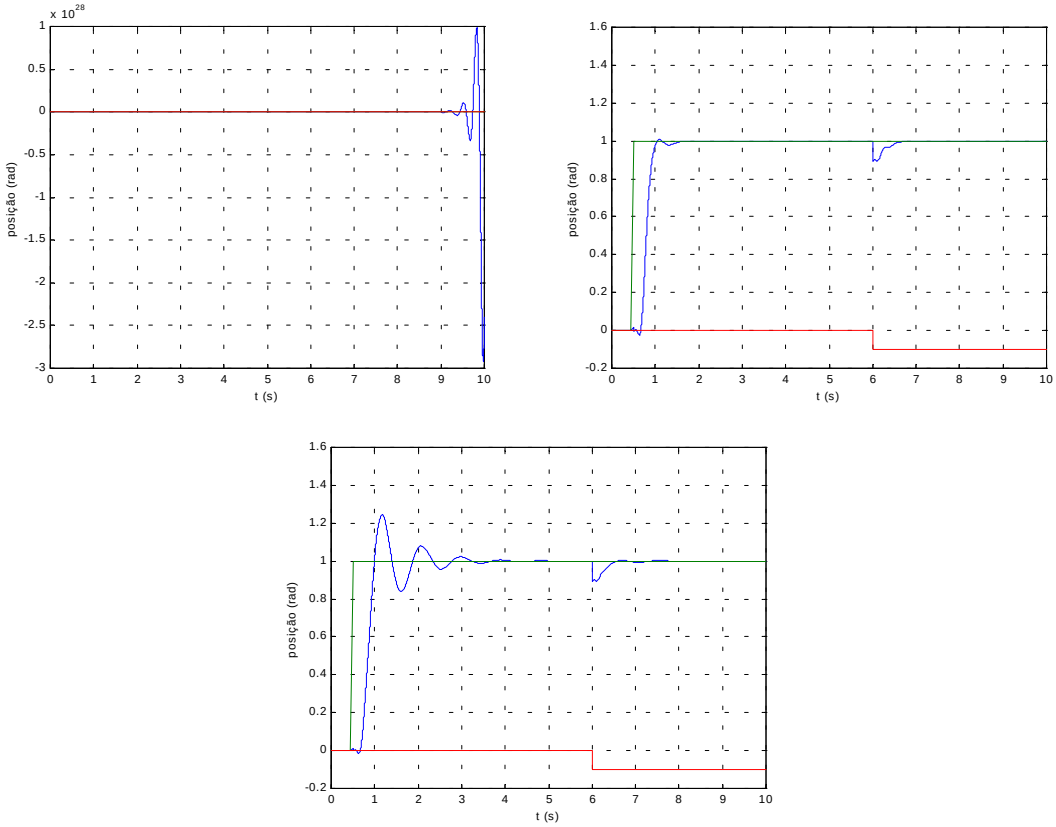

Figura 44 — Saída do sistema (a azul), controlado com o PID projectado para o sistema a média carga, aquando do seguimento de um degrau (a verde), tendo sido aplicada uma perturbação (a vermelho): à esquerda, sistema sem carga; à direita, sistema a média carga; ao fundo, sistema a plena carga

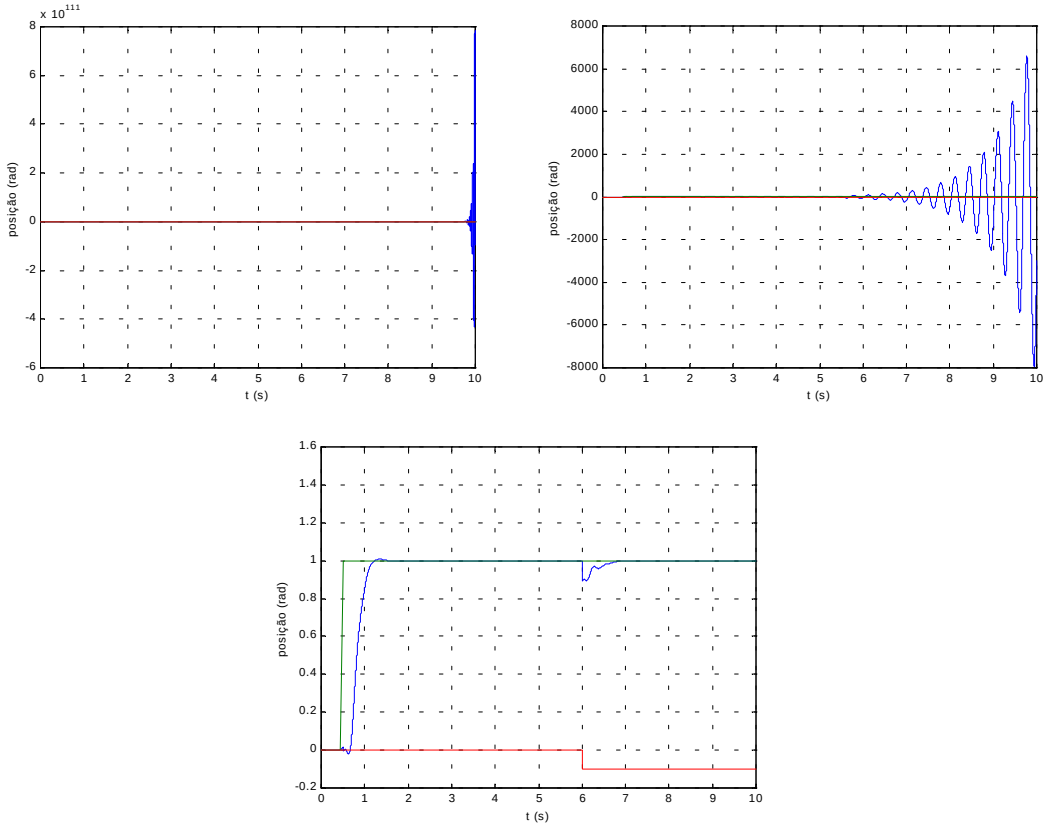

Figura 45 — Saída do sistema (a azul), controlado com o PID projectado para o sistema a plena carga, aquando do seguimento de um degrau (a verde), tendo sido aplicada uma perturbação (a vermelho): à esquerda, sistema sem carga; à direita, sistema a média carga; ao fundo, sistema a plena carga

O controlador de ordem não inteira não só consegue que o anel fechado permaneça estável como o seu desempenho permanece muito semelhante quando varia a carga. Nomeadamente, o sobreimpulso pouco se altera.

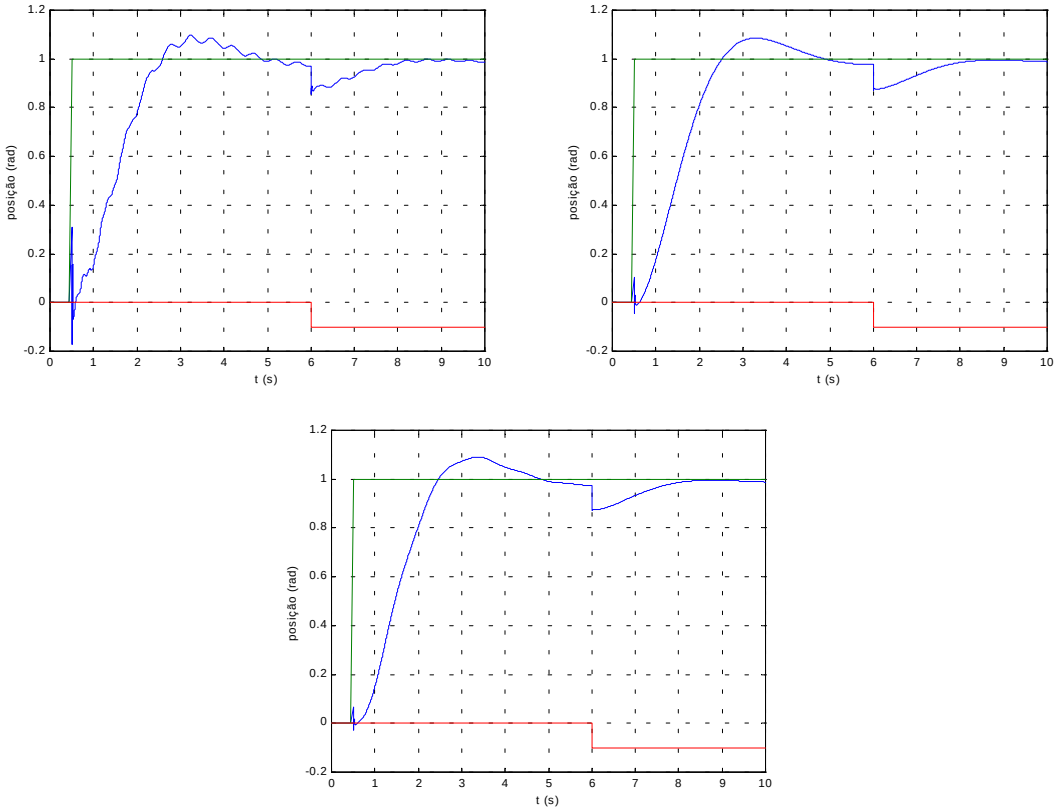

Figura 46 — Saída do sistema (a azul), controlado com o controlador de ordem não inteira, aquando do seguimento de um degrau (a verde), tendo sido aplicada uma perturbação (a vermelho): à esquerda, sistema sem carga; à direita, sistema a média carga; ao fundo, sistema a plena carga

As acções de controlo correspondentes constam da Figura seguinte.

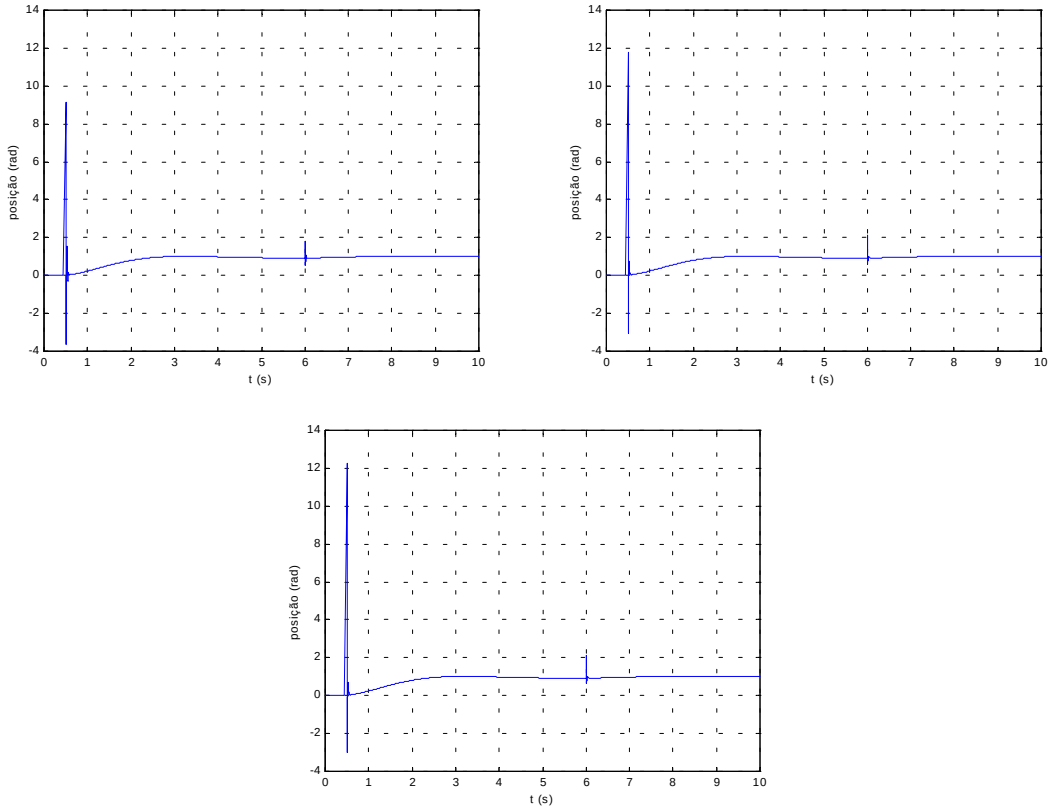

Figura 47 — Acções de controlo correspondentes à figura anterior

Eis algumas grandezas características destas respostas.

	sistema sem carga	sistema a média carga	sistema a plena carga
tempo de subida	1,68 s	1,70 s	1,69 s
tempo de estabelecimento[83]	1,68 s	1,70 s	1,69 s
máximo sobreimpulso	9,69 %	8,49 %	9,03 %
tempo de rejeição	1,53 s	1,53 s	1,48 s
margem de atraso	1,06 s	1,03 s	1,02 s

Tabela 2 — Grandezas correspondentes às respostas da Figura 46

Há que notar que o tempo de subida e o tempo de rejeição são superiores ao requerido pelas especificações.

5.1.4.3. FUNÇÃO DE SENSIBILIDADE DA SAÍDA

Da Figura seguinte consta o diagrama de Bode das funções de sensibilidade da saída, cujos ganhos nunca excedem o máximo requerido.

[83] Este é o tempo de estabelecimento da resposta a menos de 10% do valor do degrau. Usou-se essa tolerância para melhor comparação com o tempo de subida.

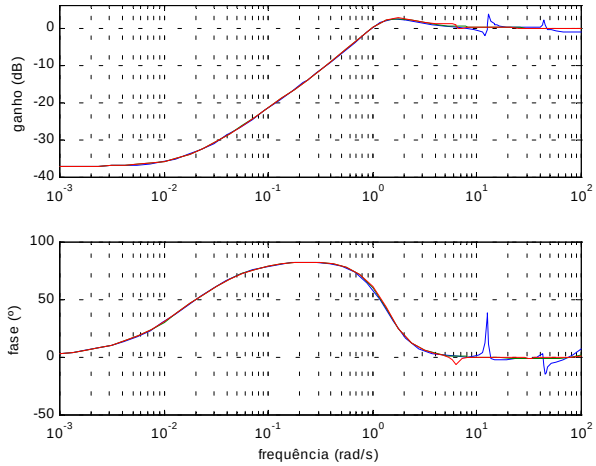

Figura 48 — Função de sensibilidade da saída para o anel aberto formado pelo sistema a controlar e pelo controlador de ordem não inteira; a azul, sistema sem carga; a verde, sistema a média carga; a vermelho, sistema a plena carga; o valor superior do eixo dos ganhos é de 6 dB

Há que notar que o ganho só é negativo para frequências inferiores a 1 rad/s, isto é, a 0,16 Hz, e não a 0,2 Hz, como requerido pelas especificações.

5.1.4.4. FUNÇÃO DE SENSIBILIDADE DA ENTRADA

Eis o diagrama de Bode das funções de sensibilidade da entrada.

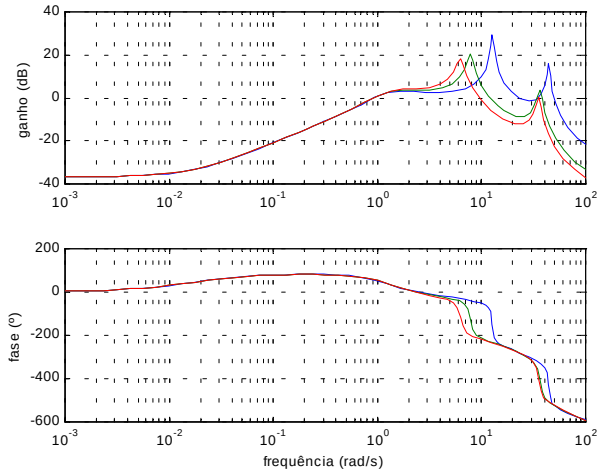

Figura 49 — Função de sensibilidade da entrada para o anel aberto formado pelo sistema a controlar e pelo controlador de ordem não inteira; a azul, sistema sem carga; a verde, sistema a média carga; a vermelho, sistema a plena carga

Conforme requerido, o ganho é inferior a 10 dB para frequências entre 8 Hz e 10 Hz (50,3 rad/s a 62,8 rad/s).

5.1.4.5. CONCLUSÕES

O controlador de ordem não inteira consegue um desempenho robusto e claramente muito superior ao conseguido pelos controladores PID. Consegue cumprir

várias das especificações de controlo (e algumas, como a margem de atraso, com grande folga); mas não todas.

Cabe aqui referir que Oustaloup *et al.* (1995) apresenta um controlador constituído por uma parte não inteira e por uma parte convencional (que atenua a função de sensibilidade na entrada nas frequências onde isso é necessário), que consegue globalmente um melhor desempenho que este controlador, embora fique atrás dele em alguns critérios e os seus tempos de subida também não cumpram as especificações. O controlador aqui apresentado, em contrapartida, é exclusivamente de ordem não inteira[84]. Isto porque o objectivo é averiguar o desempenho dos controladores de ordem não inteira, e compará-lo com o desempenho de controladores clássicos, mais do que resolver o problema paradigmático de controlo, que é usado a título de ilustração.

5.2. SISTEMA LABORATORIAL

Foi implementado no Laboratório de Controlo, Automação e Robótica da Secção de Sistemas do Departamento de Engenharia Mecânica do Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa um sistema semelhante ao descrito na secção anterior[85]. É constituído igualmente por três roldanas, ligadas duas a duas por correias flexíveis. A primeira e a terceira roldanas são actuadas por motores de corrente contínua, alimentados de –10 V a 10 V e com uma zona morta sensivelmente entre –1 V e 1 V. À terceira roldana podem-se fixar discos por forma a que a massa fique distribuída sem simetria radial em torno do eixo. A entrada do sistema é a alimentação do motor da primeira roldana. A velocidade do eixo da terceira roldana é medida por meio de um sensor de velocidade[86]. Controlou-se quer a velocidade quer a posição angular da terceira roldana. O motor da terceira roldana pode ser usado para perturbar o sistema.

Os controladores foram implementados num computador pessoal usando as caixas de ferramentas *Simulink* e *InteractiveRealtime*[87] para *Matlab*. Como interface entre o sistema a controlar e o computador, usou-se a placa DAS-1602 da Keythley Metrabyte.

[84] Oustaloup *et al.* (1995), p. 116, afirma que o controlo de ordem não inteira, isoladamente, não é conveniente para o controlo de sistemas que, como este, apresentam picos de ressonância significativos em frequências que variam com as incertezas do sistema.

[85] A implementação consistiu numa modificação do aparelho CE108, produzido pela TecQuipment Limited. Sobre esse aparelho, veja-se CE108 (1992).

[86] A sensibilidade desse sensor é de 31,83 mV/(rad/s) (CE108 1992, p. 1.7). No desenvolvimento dos controladores levou-se sempre em conta a saída do sensor em Volt, e não em rad/s, por facilidade de cálculo.

[87] *InteractiveRealtime*, v. 2.1, © 1997 Vetsch Consulting.

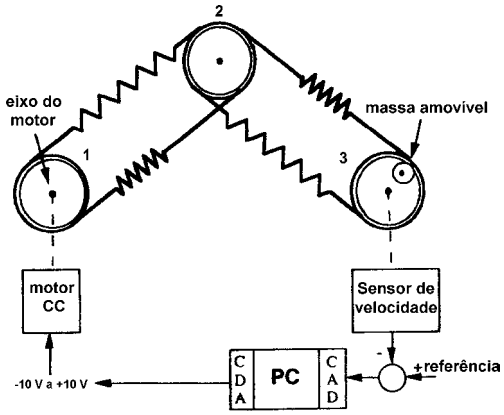

Figura 50 — Sistema laboratorial a controlar (adaptada de Landau *et al.* 1995)

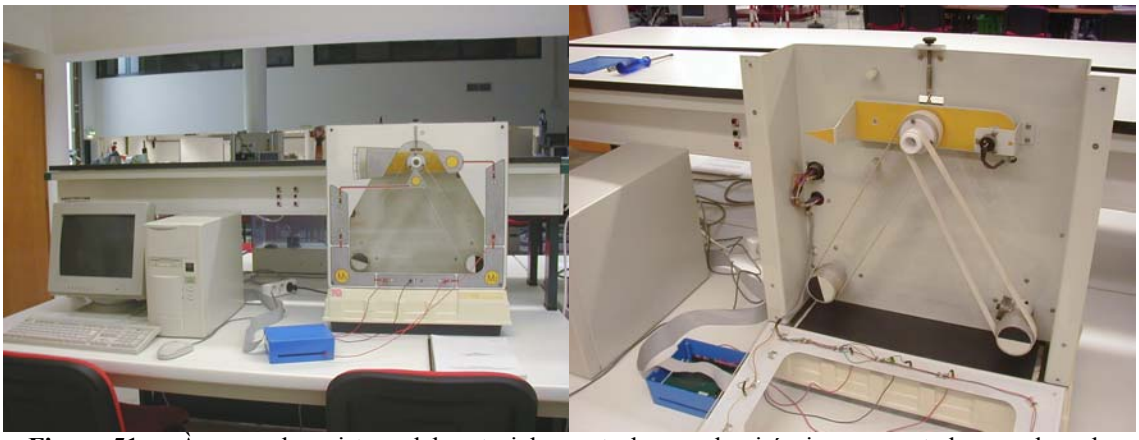

Figura 51 — À esquerda o sistema laboratorial a controlar, sendo visíveis o computador e a placa de comunicação; à direita, o interior do sistema laboratorial a controlar, sendo visíveis as massas fixas à terceira roldana

5.2.1. MODELAÇÃO DO SISTEMA

Este sistema pode, tal como o anterior, modelar-se por meio das equações de Lagrange. Partindo da equação (5.22) vem

$$\begin{cases} \Upsilon\Theta_1 + \Phi\Theta_2 = M_1 \\ \Phi\Theta_1 + \mathrm{X}\Theta_2 + \Psi\Theta_3 = 0 \\ \Psi\Theta_2 + \Omega\Theta_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Upsilon\Theta_1 + \Phi\Theta_2 = M_1 \\ \Phi\Theta_1 + \mathrm{X}\Theta_2 - \dfrac{\Psi^2}{\Omega}\Theta_2 = 0 \\ \Theta_3 = -\dfrac{\Psi}{\Omega}\Theta_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Upsilon \dfrac{\Psi^2 - \mathrm{X}\Omega}{\Phi\Omega}\Theta_2 + \Phi\Theta_2 = M_1 \\ \Theta_1 = \dfrac{\dfrac{\Psi^2}{\Omega} - \mathrm{X}}{\Phi}\Theta_2 \\ \Theta_3 = -\dfrac{\Psi}{\Omega}\Theta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Theta_2 = \dfrac{1}{\Upsilon \dfrac{\Psi^2 - \mathrm{X}\Omega}{\Phi\Omega} + \Phi} M_1 \\ \Theta_1 = \dfrac{\Psi^2 - \mathrm{X}\Omega}{\Phi\Omega}\Theta_2 \\ \Theta_3 = -\dfrac{\Psi}{\Omega\Upsilon \dfrac{\Psi^2 - \mathrm{X}\Omega}{\Phi\Omega} + \Omega\Phi} M_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Theta_3}{M_1} = -\frac{\Psi}{\dfrac{\Upsilon\Psi^2 - \Upsilon\mathrm{X}\Omega}{\Phi} + \Omega\Phi} = -\frac{\Psi\Phi}{\Upsilon\Psi^2 - \Upsilon\mathrm{X}\Omega + \Omega\Phi^2} \tag{5.34}$$

Esta expressão mostra desde já que o numerador da função de transferência é constante, pelo que o sistema não tem zeros; e que o denominador é um polinómio de sexta ordem, pelo que o sistema tem seis pólos.

Substituindo chega-se a

$$\frac{\Theta_3}{M_1} = \frac{A}{Bs^6 + Cs^5 + Ds^4 + Es^3 + Fs^2 + Gs} \tag{5.35}$$

$$A = k_{12}k_{23}r_1r_2^2r_3$$

$$B = I_1I_2I_3$$

$$C = I_1I_2b_3 + I_1b_2I_3 + b_1I_2I_3$$

$$D = I_1I_2k_{23}r_3^2 + I_1\left(k_{12} + k_{23}\right)r_2^2I_3 + k_{12}r_1^2I_2I_3 + I_1b_2b_3 + b_1I_2b_3 + b_1b_2I_3$$

$$E = b_1b_2b_3 + I_1b_2k_{23}r_3^2 + I_1\left(k_{12} + k_{23}\right)r_2^2b_3 + b_1I_2k_{23}r_3^2 + k_{12}r_1^2I_2b_3 + \ldots$$
$$\ldots + b_1\left(k_{12} + k_{23}\right)r_2^2I_3 + k_{12}r_1^2b_2I_3$$

$$F = b_1b_2k_{23}r_3^2 + b_1\left(k_{12} + k_{23}\right)r_2^2b_3 + k_{12}r_1^2b_2b_3 + I_1k_{12}r_2^2k_{23}r_3^2 + \ldots$$
$$\ldots + k_{12}r_1^2I_2k_{23}r_3^2 + k_{12}r_1^2k_{23}r_2^2I_3$$

$$G = b_1k_{12}r_2^2k_{23}r_3^2 + k_{12}r_1^2b_2k_{23}r_3^2 + k_{12}r_1^2k_{23}r_2^2b_3$$

5.2.2. IDENTIFICAÇÃO DO SISTEMA

O tempo de amostragem usado com o sistema foi de $T_s = 0,05\,\mathrm{s}$ (correspondente a uma frequência de amostragem de 20 Hz). Este tempo de amostragem é o que foi empregue com o problema paradigmático atrás mencionado. É perfeitamente razoável no caso presente porque uma entrada sinusoidal com metade dessa frequência é a mais rápida que é possível impor sem que as correias comecem a escorregar.

Este sistema foi identificado por meio da sua resposta em frequência e por meio da sua resposta no tempo. Assumiu-se que é linear. Na verdade, a saída para uma entrada sinuosoidal é praticamente sinusoidal, sendo a maior diferença a que é causada pela zona morta.

Para a identificação em frequência usaram-se duas séries de entradas sinusoidais, com amplitudes de 6 V e 8 V. Os dois pares de curvas experimentais do diagrama de Bode são suficientemente semelhantes para corroborar a hipótese de que o sistema é

linear. Ajustando por tentativa e erro uma curva de ganho às curvas experimentais, chegou-se à seguinte função de transferência:

$$\frac{\dot{\Theta}_3}{M_1} = \frac{656250}{(s+274,4)(s+7,621)(s^2+14s+625)} = S_1 \tag{5.36}$$

Eis a comparação entre as curvas experimentais e as ajustadas:

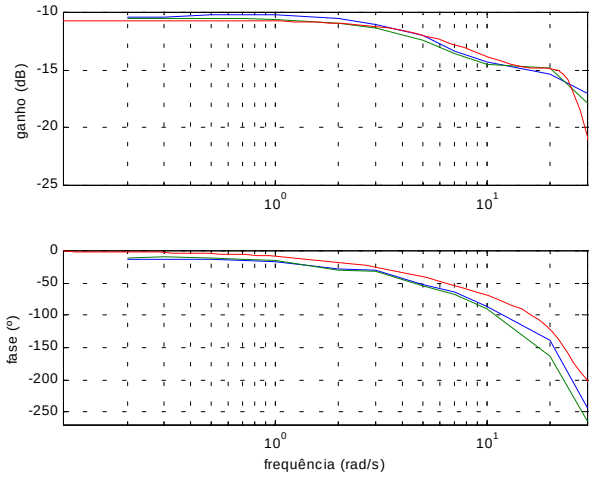

Figura 52 — Diagrama de Bode experimental do sistema a controlar (a azul: curva com sinusóides de entrada de amplitude 6 V; a verde: curva com sinusóides de entrada de amplitude 8V) e diagrama de Bode do modelo ajustado à curva de ganho S_1 (a vermelho)

Empregando o método de identificação implementado na caixa de ferramentas de controlo de ordem não inteira, chegou-se à seguinte função de transferência:

$$\frac{\dot{\Theta}_3}{M_1} = \frac{32544,8502(s-0,5728)}{(s-0,7069)(s^2+23,93s+156,2)(s^2+11,61s+632,3)} = S_2 \tag{5.37}$$

Embora as frequências do pólo instável e do zero de fase não mínima não sejam exactamente iguais, é conveniente eliminar ambas, conseguindo-se um sistema estável sem prejudicar grandemente a concordância com a curva experimental da fase:

$$\frac{\dot{\Theta}_3}{M_1} = \frac{3\times10^4}{(s^2+23,93s+156,2)(s^2+11,61s+632,3)} = S_3 \tag{5.38}$$

Eis a comparação entre as curvas experimentais e as ajustadas:

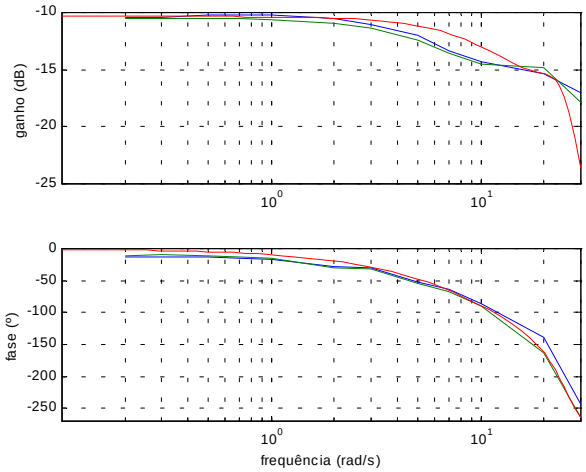

Figura 53 — Diagrama de Bode experimental do sistema a controlar (a azul: curva com sinusóides de entrada de amplitude 6 V; a verde: curva com sinusóides de entrada de amplitude 8V) e diagrama de Bode do modelo ajustado à curva de fase S_3 (a vermelho)

Para a identificação por meio da resposta no tempo usaram-se as respostas do sistema a dois degraus, de 6 V e 8 V, divididas pela amplitude do degrau. A diferenciação numérica dessas respostas corresponde à resposta a um impulso; assim, usou-se o método da desconvolução[88] e experimentaram-se várias ordens possíveis para os modelos. Só a ordem 4 conduziu a sistemas estáveis para ambos os degraus. A função obtida com o degrau de 6 V apresenta o melhor valor estacionário final da resposta ao degrau[89]:

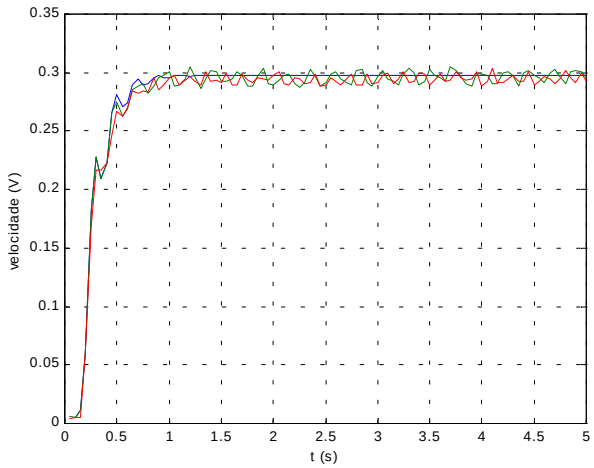

Figura 54 — Resposta a um degrau unitário do modelo identificado (a azul), resposta experimental a um degrau de 6 V, adimensionalizada (a verde), e resposta experimental a um degrau de 8 V, adimensionalizada (a vermelho)

A conversão do modelo discreto para um modelo contínuo fez-se usando retenção de ordem zero, o método que melhor preservou o desempenho em frequência; eis o resultado:

[88] Costa (1987), pp. 73-76.

[89] Em todas as figuras desta subsecção e da subsecção 5.2.4 que mostram respostas do sistema, a saída é a velocidade angular da terceira roldana, e os valores apresentados são os da tensão de saída do respectivo sensor. Conforme referido na nota 86, a sensibilidade do sensor é de 31,83 mV/(rad/s).

$$\frac{\dot{\Theta}_3}{M_1} = \frac{0,0065104\left(s+487,7\right)\left(s^2-45,46s+1058\right)\left(s^2-47,41s+2657\right)}{\left(s+6,129\right)\left(s^2+9,294s+1000\right)\left(s^2+61,27s+4886\right)} = S_4 \quad (5.39)$$

Como a frequência dos zeros é maior que a gama de frequências de interesse, estes podem ser desprezados. Eis o resultado final:

$$\frac{\dot{\Theta}_3}{M_1} = \frac{8928436,64}{\left(s+6,129\right)\left(s^2+9,294s+1000\right)\left(s^2+61,27s+4886\right)} = S_5 \quad (5.40)$$

Contudo, o diagrama de Bode deste modelo discorda mais dos dados experimentais que os modelos anteriores:

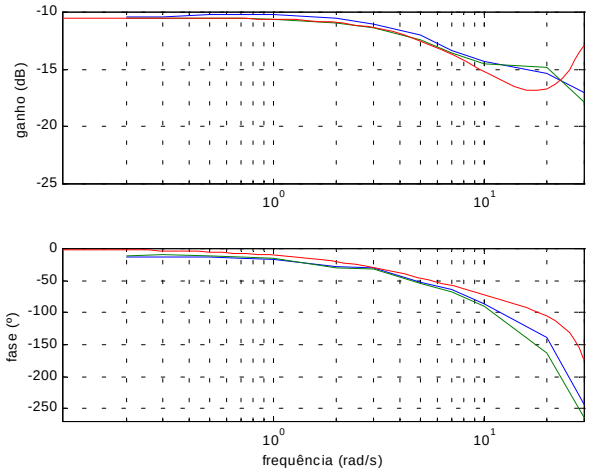

Figura 55 — Diagrama de Bode experimental do sistema a controlar (a azul: curva com sinusóides de entrada de amplitude 6 V; a verde: curva com sinusóides de entrada de amplitude 8V) e diagrama de Bode do modelo obtido a partir da resposta a degraus S_5 (a vermelho)

Como resumo da concordância entre os diagramas de Bode dos modelos identificados e os diagramas experimentais, calcularam-se os valores dos seguintes índices quadráticos dos erros cometidos pelas curvas ajustadas face às experimentais[90]:

$$\varepsilon_{ganho} = \int_{0,2}^{30} \left[\frac{20\log_{10}\left|S\left(j\omega\right)\right| - 20\log_{10}\left|S_{\text{experimental}}\left(j\omega\right)\right|}{20\log_{10}\left|S_{\text{experimental}}\left(j\omega\right)\right|} \right]^2 d\omega \quad (5.41)$$

$$\varepsilon_{fase} = \int_{0,2}^{30} \left\{ \frac{\arg\left[S\left(j\omega\right)\right] - \arg\left[S_{\text{experimental}}\left(j\omega\right)\right]}{\arg\left[S_{\text{experimental}}\left(j\omega\right)\right]} \right\}^2 d\omega \quad (5.42)$$

[90] Os integrais foram calculados numericamente pela regra do trapézio composta. As curvas experimentais foram interpoladas por curvas seccionalmente polinomiais do terceiro grau.

	ε_{ganho} (6 V) log(rad/s)	ε_{ganho} (8 V) log(rad/s)	ε_{fase} (6 V) log(rad/s)	ε_{fase} (8 V) log(rad/s)
S_1	0,066	0,038	3,029	3,405
S_3	0,171	0,210	1,953	1,735
S_5	0,154	0,147	2,161	2,542

Tabela 3 — Erros cometidos face aos dados experimentais pelos modelos S_1, S_3 e S_5

Os valores para o erro da fase são sistematicamente altos porque a fase assume valores próximos de zero numa larga gama de frequências. Quanto aos valores do ganho, S_3 tem um erro maior sobretudo por causa da queda muito grande do ganho para frequências elevadas.

A resposta ao degrau dos modelos S_1 e S_3 também não concorda completamente com os dados experimentais:

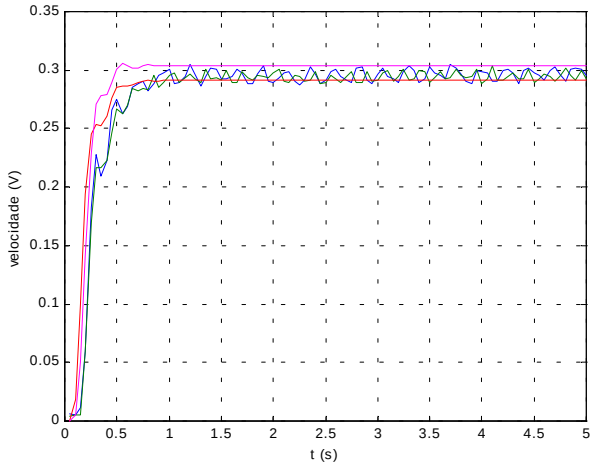

Figura 56 —Resposta experimental a um degrau de 6 V, adimensionalizada (a azul), resposta experimental a um degrau de 8 V, adimensionalizada (a verde), resposta a um degrau unitário do modelo ajustado à curva de ganho S_1 (a vermelho), e resposta a um degrau unitário do modelo ajustado à curva de fase S_3 (a cor de rosa)

Repare-se que todos os modelos identificados para a situação em que a saída do sistema é a velocidade são de quarta ordem, enquanto que, pela modelação, deviam ser de sexta ordem e ter um zero na origem. No que diz respeito à ordem do modelo, há manifestamente dois pólos com frequências tão elevadas que não influenciam o sistema, pelo menos nas frequências empregues. Quanto ao zero na origem, os dados experimentais não reflectem de nenhum modo a sua existência.

O modelo S_3 é de todos os apresentados o único que consegue aproximar razoavelmente quer os diagramas de Bode experimentais quer as respostas experimentais a degraus. Como se verá na subsecção seguinte, foi este o modelo com o qual se conseguiu o melhor controlador para a velocidade do sistema.

Quanto ao sistema com as massas ligadas à terceira roldana, esse sistema não é linear, o que impede que o resultado da sua identificação seja uma função de transferência. Na verdade, as massas, estando excentricamente colocadas, impedem que a saída seja sinusoidal para uma entrada sinusoidal; existe sempre uma componente oscilatória de frequência directamente proporcional à saída, porque, sempre que a

roldana dá uma volta, a massa acelera-a na descida e desacelera-a na subida. Isto é evidente na Figura seguinte.

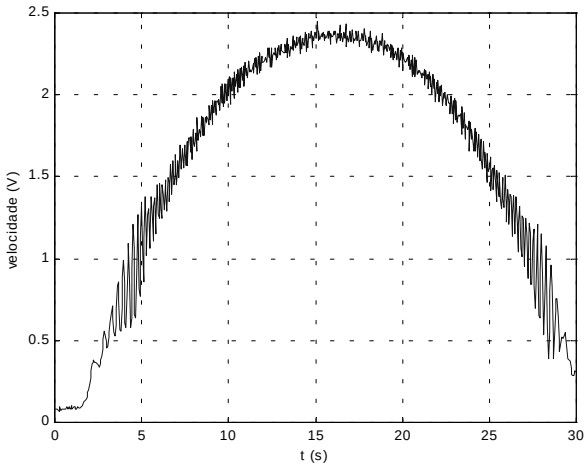

Figura 57 — Resposta experimental do sistema, modificado pela aplicação de duas massas na terceira roldana, a uma entrada sinusoidal de frequência 0,1 rad/s e amplitude 8 V

5.2.3. ESPECIFICAÇÕES DE DESEMPENHO

Como especificações de desempenho, quer para o controlo de velocidade quer para o controlo de posição, mantiveram-se as quatro primeiras especificações da subsecção 0, relativas à resposta no tempo, alterando apenas a primeira, no sentido de um controlo mais rápido:

- O tempo de estabelecimento a menos de 10% do valor final dum degrau deve ser menor que 1 s.
- O sobreimpulso na resposta a um degrau deve ser menor que 10%.
- As perturbações devem ser rejeitadas em 1,2 s, considerando-se uma perturbação rejeitada quando a saída recupera para 10% do valor extremo a que chegou causado pela perturbação.
- As perturbações constantes devem ser rejeitadas.

5.2.4. CONTROLO DE VELOCIDADE

Deve aqui notar-se que a saída do sensor de velocidade angular da terceira roldana não era nula quando ela se encontrava parada. Como se verá nas figuras desta subsecção, nessa situação a tensão medida pode não ser constante mas situa-se entre os 0,4 V e os 0,6 V. Isto terá relevância sobretudo para o controlo de posição, como se verá na subsecção seguinte.

5.2.4.1. DESENVOLVIMENTO DOS CONTROLADORES

O controlador para a velocidade que melhor desempenho apresentou foi concebido usando o modelo S_3; é um controlador de fase variável, que assegura uma margem de fase em anel aberto de 100º; essa especificação foi escolhida por tentativa e erro para cumprir os critérios enunciados na subsecção 5.2.3. As frequências empregues para o cálculo do controlador, seleccionadas por tentativa e erro de acordo com as

heurísticas referidas na subsecção 3.1.3.4.1, foram de 0,1 rad/s, 1 rad/s, 3,16 rad/s, 10 rad/s, 14 rad/s, 24 rad/s, 31,6 rad/s e 100 rad/s; foram escolhidas para amostrar o comportamento do sistema em todo o intervalo [0,1; 100] rad/s; são mais esparsas no extremo esquerdo do intervalo, onde a fase é quase constante, e concentram-se em torno da inflexão que se dá entre 20 rad/s e 30 rad/s.

A sua função de transferência é:

$$C_{\dot{\Theta}} = \frac{29,42\left(s+1,294\right)\left(s+744,3\right)\left(s^2+20,67s+123,7\right)\left(s^2+11,25s+624,5\right)}{\left(s+0,01535\right)\left(s+1,772\right)\left(s+100\right)^4} \tag{5.43}$$

Os pólos em –100 rad/s foram adicionados para tornar a função de transferência fisicamente realizável. O ganho foi ajustado por tentativa e erro para conseguir os melhores resultados.

O PID foi ajustado pelo segundo método de Ziegler-Nichols[91]; o ajuste fino dos parâmetros foi feito por tentativa e erro. Os seus valores são:

$$\begin{aligned} P &= 3,6 \\ I &= 13 \\ D &= 0 \end{aligned} \tag{5.44}$$

Neste caso, o controlador PI revelou-se melhor que o PID.

5.2.4.2. SEGUIMENTO DE UM DEGRAU E REJEIÇÃO DE PERTURBAÇÕES

Eis as respostas a um degrau apresentadas pelo sistema com o controlador PID e com o controlador de ordem não inteira. Foi aplicada uma perturbação com a forma de um degrau, fazendo funcionar o motor da terceira roldana a partir de certo momento, perturbação essa que é rejeitada por ambos os controladores.

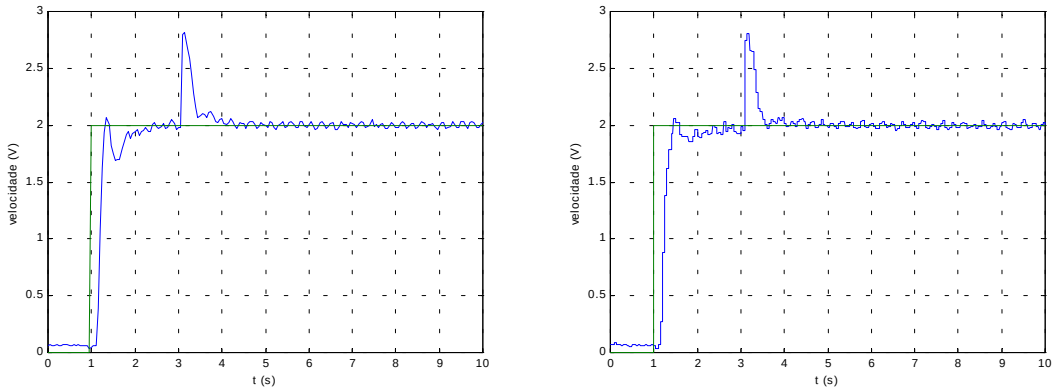

Figura 58 — Saída do sistema (a azul) aquando do seguimento de um degrau (a verde): à esquerda, resultado obtido com o PID; à direita, resultado obtido com o controlador de ordem não inteira; foi aplicada uma perturbação constante da Figura seguinte

[91] Ogata (1997), pp. 672-673.

As acções de controlo e as perturbações aplicadas constam da Figura seguinte. A amplitude da perturbação, de 4,2V, é a amplitude que provoca, quando aplicada isoladamente, uma saída de 1V.

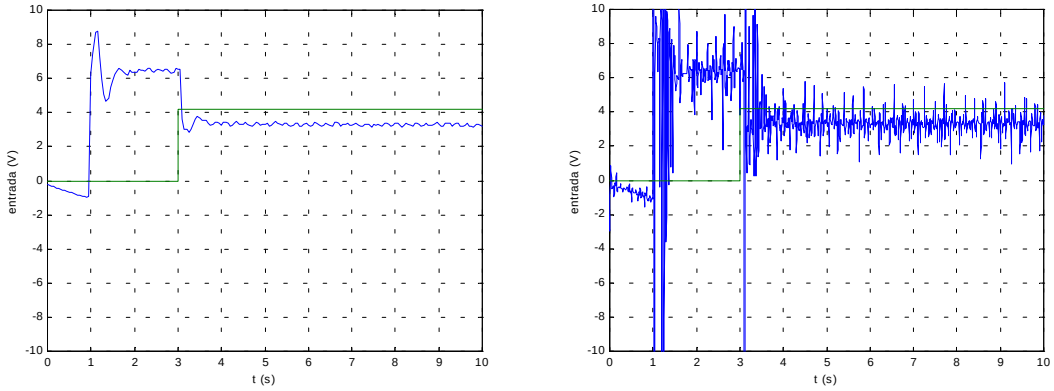

Figura 59 — Acções de controlo (a azul) e perturbações (a verde) correspondentes à figura anterior

Eis algumas grandezas características destas respostas:

	PID	controlador não inteiro
tempo de estabelecimento	0,70 s	0,40 s
máximo sobreimpulso	3,52 %	3,03 %
tempo de rejeição	0,40 s	0,50 s

Tabela 4 — Grandezas correspondentes às respostas da Figura 58

Há que reconhecer que a acção de controlo do controlador de ordem não inteira é muito mais variável. Foi truncada a ±10V, como consta da Figura 59, porque o motor não suporta acções de controlo fora desse intervalo. De resto, os desempenhos dos controladores são semelhantes, e cumprem as especificações.

5.2.4.3. SEGUIMENTO DE UMA SINUSÓIDE

As respostas ao seguimento de uma sinusóide apresentadas pelo sistema com o controlador PID e com o controlador de ordem não inteira constam da Figura seguinte.

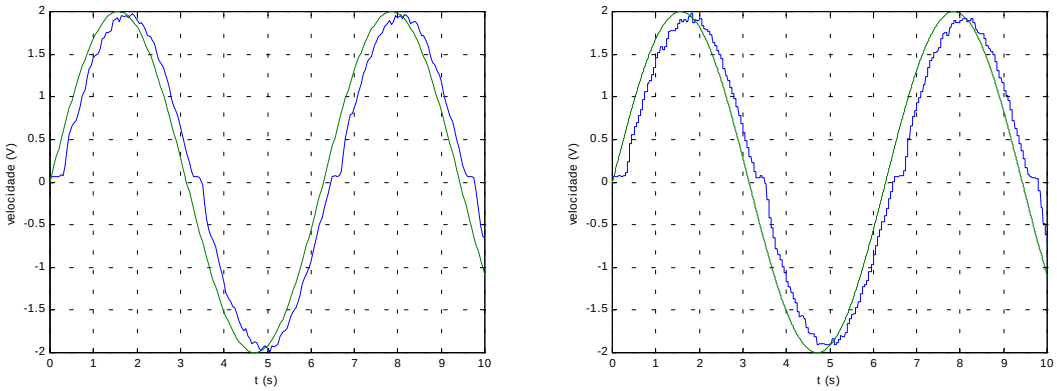

Figura 60 — Saída do sistema (a azul) aquando do seguimento de uma sinusóide (a verde): à esquerda, resultado obtido com o PID; à direita, resultado obtido com o controlador de ordem não inteira

A seguinte Figura mostra as acções de controlo aplicadas.

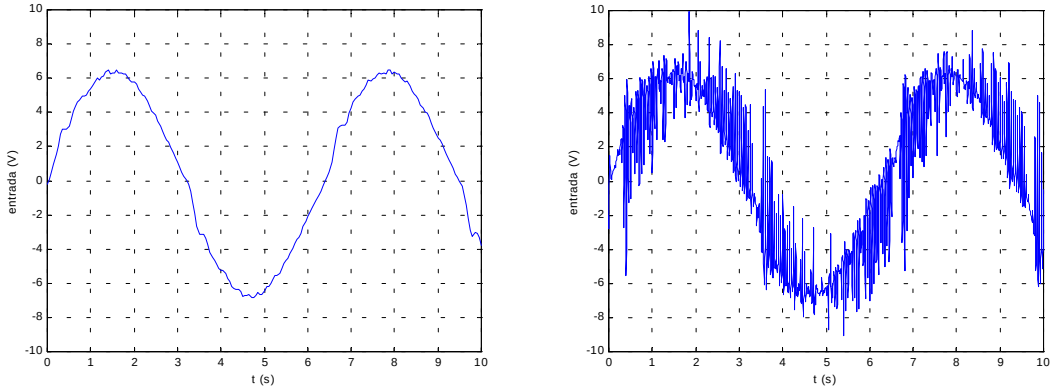

Figura 61 — Acções de controlo correspondentes à figura anterior

5.2.4.4. ROBUSTEZ A ALTERAÇÕES NO SISTEMA

Prendendo uma massa à terceira roldana ambos os controladores pioram um pouco o seu desempenho. Eis as respostas e as acções de controlo quando o mesmo degrau e a mesma perturbação da Figura 58 e da Figura 59 são aplicados.

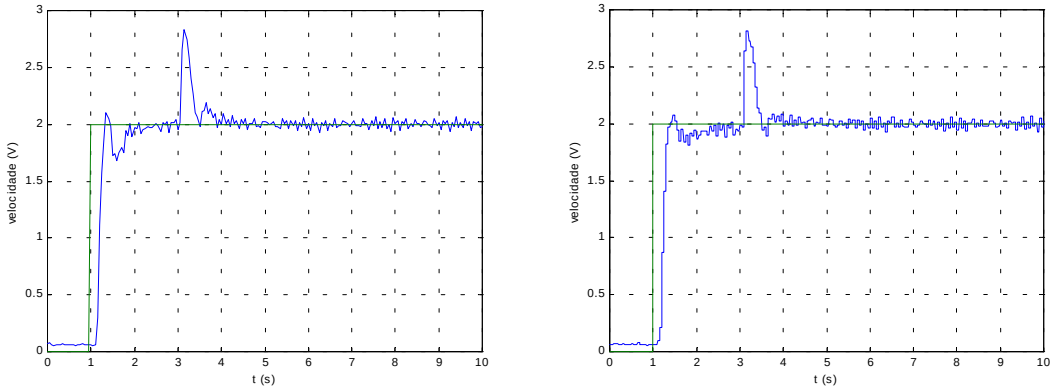

Figura 62 — Saída do sistema modificado (a azul) aquando do seguimento de um degrau (a verde): à esquerda, resultado obtido com o PID; à direita, resultado obtido com o controlador de ordem não inteira; foi aplicada uma perturbação constante da figura seguinte

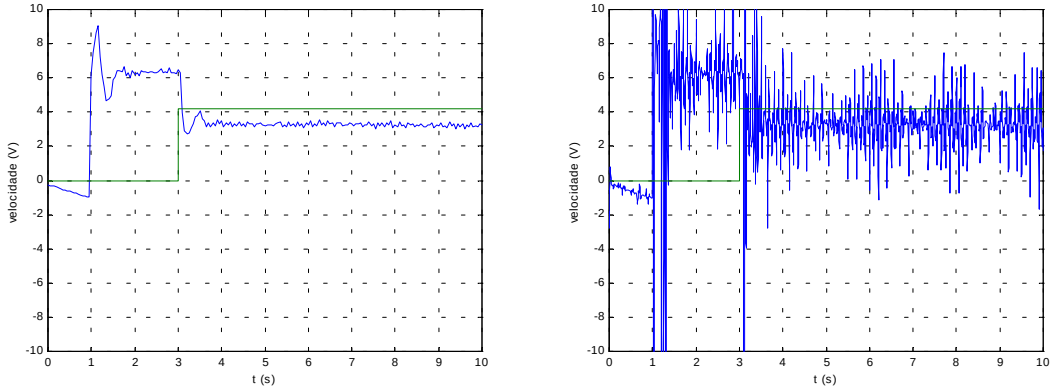

Figura 63 — Acções de controlo (a azul) e perturbações (a verde) correspondentes à figura anterior

O controlador PID nem sempre apresenta um comportamento tão robusto. Eis as respostas a um degrau apresentadas pelo sistema com o controlador PID e com o controlador de ordem não inteira, para o sistema nominal e para o sistema com uma massa presa à terceira roldana, mas agora para um degrau de menor amplitude (e sem perturbação):

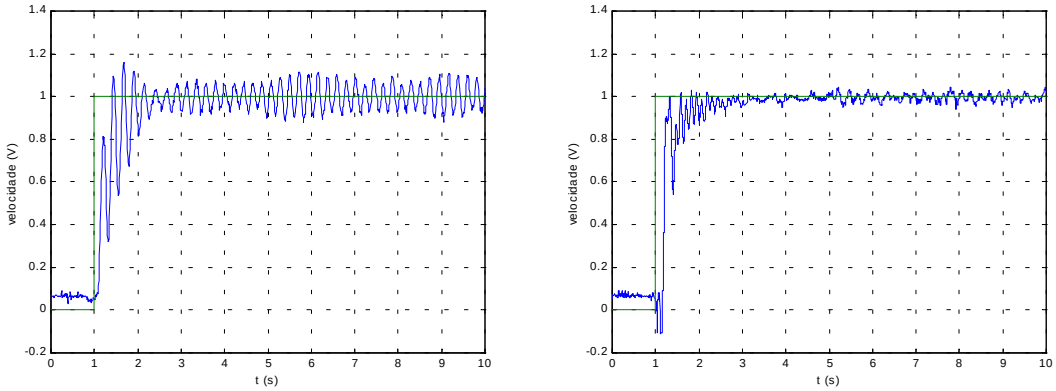

Figura 64 — Saída do sistema nominal (a azul) aquando do seguimento de um degrau (a verde): à esquerda, resultado obtido com o PID; à direita, resultado obtido com o controlador de ordem não inteira

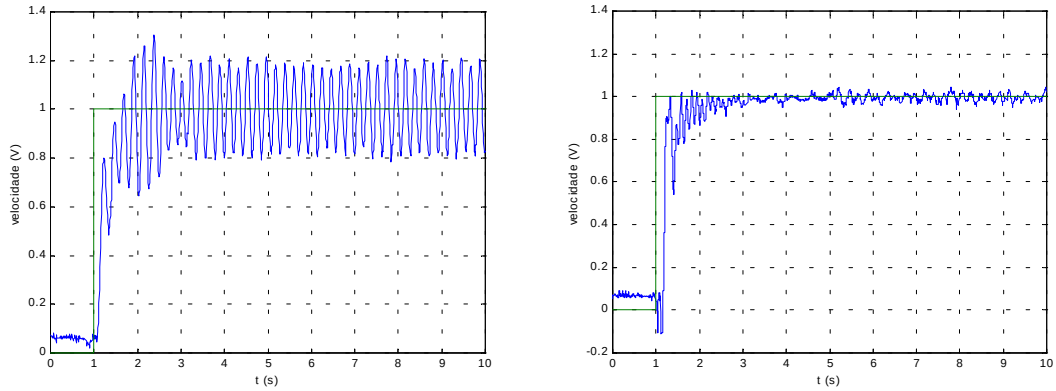

Figura 65 — Saída do sistema modificado (a azul) aquando do seguimento de um degrau (a verde): à esquerda, resultado obtido com o PID; à direita, resultado obtido com o controlador de ordem não inteira

As acções de controlo aplicadas foram as da Figura seguinte.

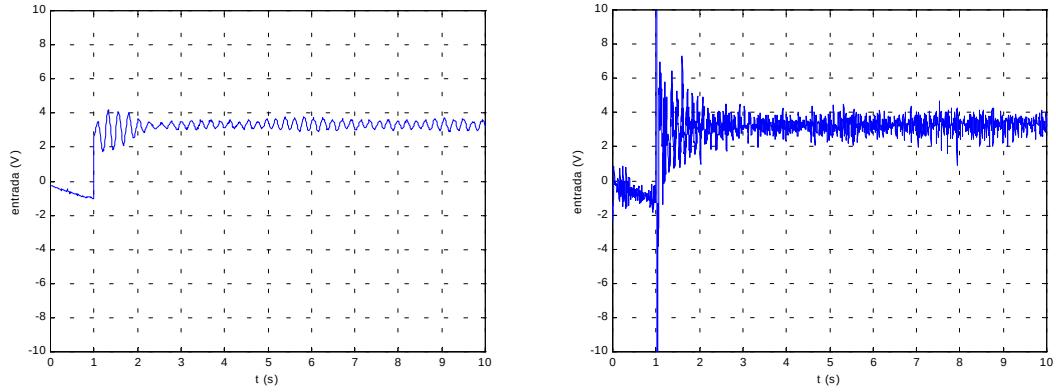

Figura 66 — Acções de controlo correspondentes à Figura 64

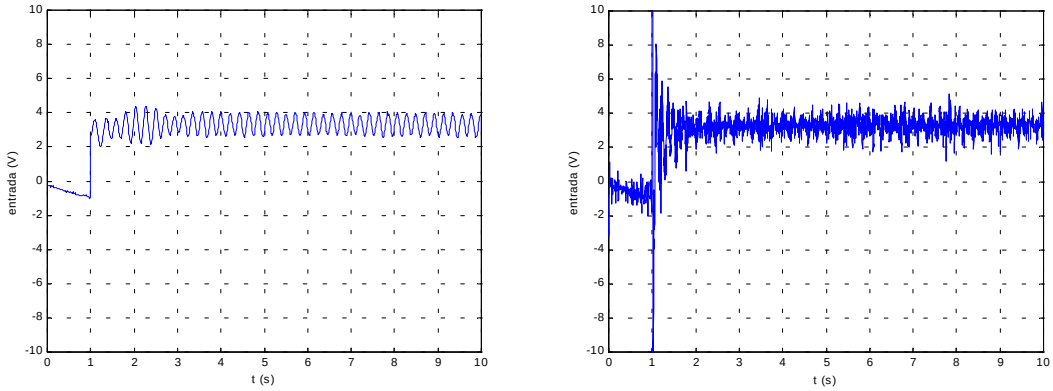

Figura 67 — Acções de controlo correspondentes à Figura 65

É visível a maior robustez do controlador de ordem não inteira. Mesmo para o sistema nominal, o desempenho do PID piora quando se utilizam degraus de amplitude diferente daquela que foi usada para o ajuste fino dos parâmetros. Isso sucede porque o sistema, embora razoavelmente linear, não o é completamente. Quando se fixa a massa à terceira roldana, a saída não é constante mas oscila; a oscilação tem amplitude variável mas é cerca de 20 % da amplitude do degrau com o PID e cerca de 10 % com o controlador de ordem não inteira.

5.2.5. CONTROLO DE POSIÇÃO

A posição angular da terceira roldana foi obtida a partir dos valores medidos pelo sensor de velocidade angular por integração. Como referido na subsecção 5.2.4, a tensão medida estando a roldana parada não era nula. Isso teria um efeito nefasto na integração, visto que os erros se iriam acumulando. Para evitar isso, antes da integração, colocou-se uma zona morta, de 0,4 V a 0,6 V, que despreza os valores desse intervalo e subtrai a sua largura aos restantes; e ainda se subtraiu –0,1 V ao resultado. Desse modo conseguiu-se que, estando a roldana parada, o valor da posição angular calculado não variasse.

Além disso, a zona morta dos motores que actuam as roldanas faz com que seja impossível aplicar acções de controlo menores que um certo valor. Isso faz com que seja muito fácil ocorrerem erros estacionários na resposta a um degrau ou em todas as situações em que o erro é pequeno.

5.2.5.1. DESENVOLVIMENTO DOS CONTROLADORES

A partir dos modelos atrás apresentados pode-se obter outros tantos para a posição angular por integração:

$$\frac{\Theta_3}{M_1} = \frac{\dot{\Theta}_3}{M_1} \cdot \frac{1}{s} \tag{5.45}$$

Contudo, o controlador de ordem não inteira para a posição que melhor desempenho apresentou não foi concebido usando estes modelos, mas sim o modelo S_1. Com esse modelo, desenvolveu-se um controlador para a velocidade, de fase variável, que assegura uma margem de fase em anel aberto de 80º; essa especificação foi

escolhida por tentativa e erro para cumprir os critérios enunciados na subsecção 5.2.3. As frequências empregues para o cálculo do controlador, seleccionadas por tentativa e erro de acordo com as heurísticas referidas na subsecção 3.1.3.4.1, foram de 0,1 rad/s, 1 rad/s, 3,16 rad/s, 10 rad/s, 25 rad/s, 31,6 rad/s e 100 rad/s; foram escolhidas para amostrar o comportamento do sistema em todo o intervalo [0,1; 100] rad/s; são mais esparsas no extremo esquerdo do intervalo, onde a fase é quase constante, e concentram-se em torno da inflexão que se dá entre 20 rad/s e 30 rad/s. Em seguida, e visto que o objectivo era o controlo da posição, juntou-se ao controlador um zero na origem, que cancelou um pólo na origem.

Eis a sua função de transferência:

$$C_{\Theta} = \frac{98,56\left(s+0,01486\right)\left(s+1,218\right)\left(s+10,11\right)\left(s+1413\right)\left(s^2+14,84s+639,6\right)}{\left(s+0,9432\right)s\left(s+100\right)^4} \tag{5.46}$$

Os pólos em –100 rad/s foram adicionados para tornar a função de transferência fisicamente realizável. O ganho foi ajustado por tentativa e erro para conseguir os melhores resultados.

O PID foi ajustado pelo segundo método de Ziegler-Nichols; o ajuste fino dos parâmetros foi feito por tentativa e erro. Os seus valores são:

$$\begin{aligned} P &= 7 \\ I &= 1 \\ D &= 0 \end{aligned} \tag{5.47}$$

Também neste caso o controlador PI se revelou melhor que o PID.

5.2.5.2. SEGUIMENTO DE UM DEGRAU E REJEIÇÃO DE PERTURBAÇÕES

Da Figura seguinte constam as respostas a um degrau apresentadas pelo sistema com o controlador PID e com o controlador de ordem não inteira[92]. Foi aplicada uma perturbação que é quase completamente rejeitada por ambos os controladores. A rejeição nunca é exactamente perfeita, nem o valor do degrau é exactamente atingido, pelas razões já referidas.

[92] Em todas as figuras desta subsecção que mostram respostas do sistema, a saída é a posição angular da terceira roldana, e os valores apresentados são os do integral no tempo da tensão de saída do sensor de velocidade, corrigido da forma atrás descrita. De acordo com a sensibilidade do sensor referida na nota 86, 1 rad corresponde a 31,83 mVs.

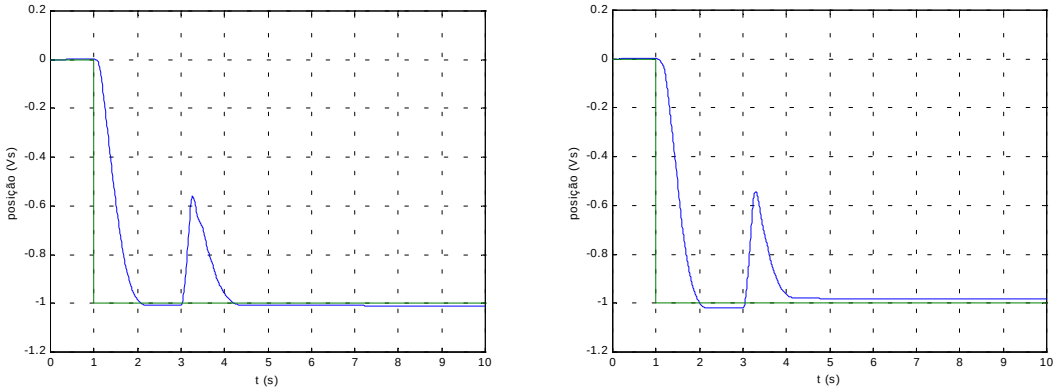

Figura 68 — Saída do sistema (a azul) aquando do seguimento de um degrau (a verde): à esquerda, resultado obtido com o PID; à direita, resultado obtido com o controlador de ordem não inteira; foi aplicada uma perturbação constante da figura seguinte

As acções de controlo e as perturbações aplicadas constam da Figura seguinte. A perturbação aplicada é um pulso na tensão de alimentação da terceira roldana. Experimentalmente verificou-se que esta perturbação conduz a uma variação da posição angular da terceira roldana de 0,4 Vs. A amplitude da perturbação, que foi 7 V, não pôde ser maior porque isso faria saltar a correia; a duração, de 0,2 s, corresponde a um valor já significativo da perturbação.

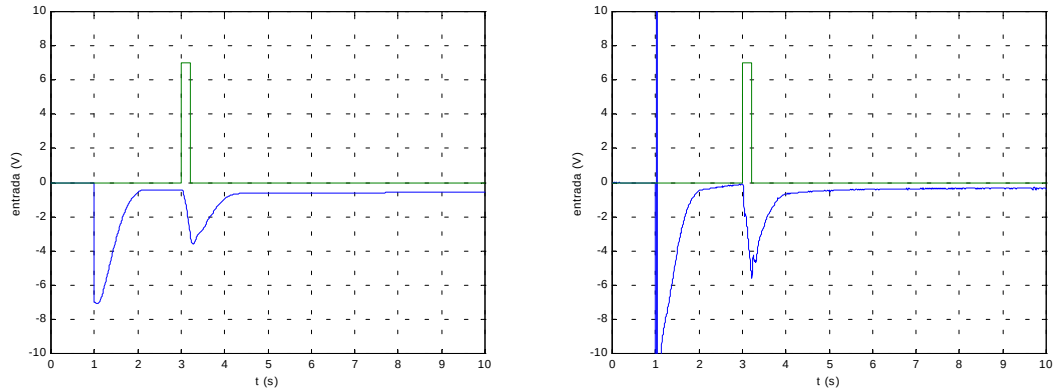

Figura 69 — Acções de controlo (a azul) e perturbações (a verde) correspondentes à figura anterior

Eis algumas grandezas características destas respostas:

	PID	controlador não inteiro
tempo de estabelecimento	0,80 s	0,80 s
máximo sobreimpulso	0,66 %	2,04 %
tempo de rejeição	1,03 s	1,57 s

Tabela 5 — Grandezas correspondentes às respostas da Figura 68

O controlador de ordem não inteira, além de conduzir uma vez mais a uma acção de controlo muito mais variável, tem um desempenho ligeiramente inferior. Para amplitudes diferentes do degrau, contudo, o desempenho do PID piora mais significativamente. O exemplo que se segue diz respeito a uma amplitude menor, caso em que os erros estacionários tendem a ser maiores por impossibilidade de aplicar pequenas acções de controlo.

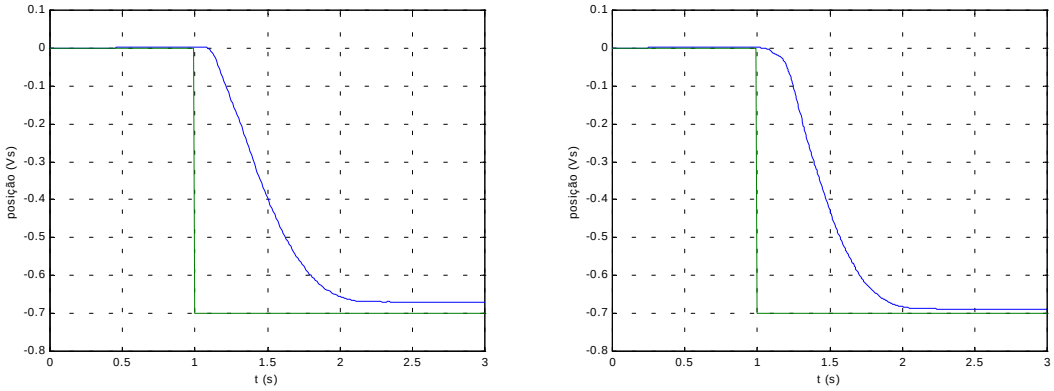

Figura 70 —Saída do sistema (a azul) aquando do seguimento de um degrau (a verde): à esquerda, resultado obtido com o PID; à direita, resultado obtido com o controlador de ordem não inteira

Nestas situações o controlador de ordem não inteira costuma conseguir um menor erro estacionário. No caso apresentado o erro com o PID era de 4,28 % e com o controlador de ordem não inteira de 1,69 %.

Eis as acções de controlo respectivas:

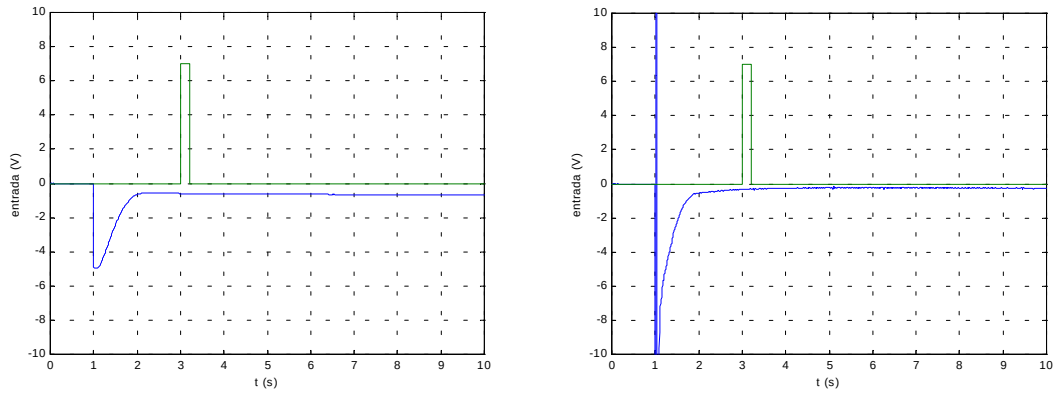

Figura 71 — Acções de controlo correspondentes à figura anterior

5.2.5.3. SEGUIMENTO DE UMA SINUSÓIDE

As respostas ao seguimento de uma sinusóide apresentadas pelo sistema com o controlador PID e com o controlador de ordem não inteira foram as seguintes.

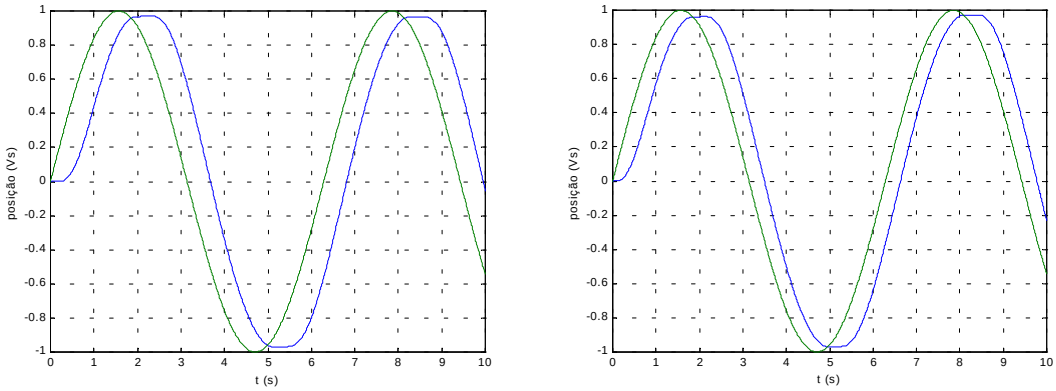

Figura 72 — Saída do sistema (a azul) aquando do seguimento de uma sinusóide (a verde): à esquerda, resultado obtido com o PID; à direita, resultado obtido com o controlador de ordem não inteira

As acções de controlo e as perturbações aplicadas encontram-se na Figura seguinte. A amplitude da perturbação, de 4,2V, é a amplitude que provoca, quando aplicada isoladamente, uma saída de 1V.

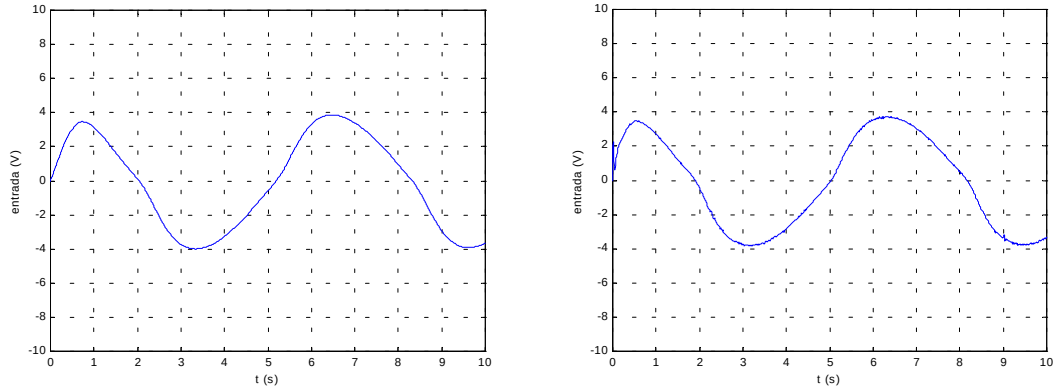

Figura 73 — Acções de controlo correspondentes à figura anterior

A saída com o controlador de ordem não inteira está menos desfasada da referência que com o PID.

5.2.5.4. ROBUSTEZ A ALTERAÇÕES NO SISTEMA

Eis as respostas a uma rampa (parte de uma onde em dente de serra) apresentadas pelo sistema com o controlador PID e com o controlador de ordem não inteira, para o sistema nominal e para o sistema com uma massa presa à terceira roldana:

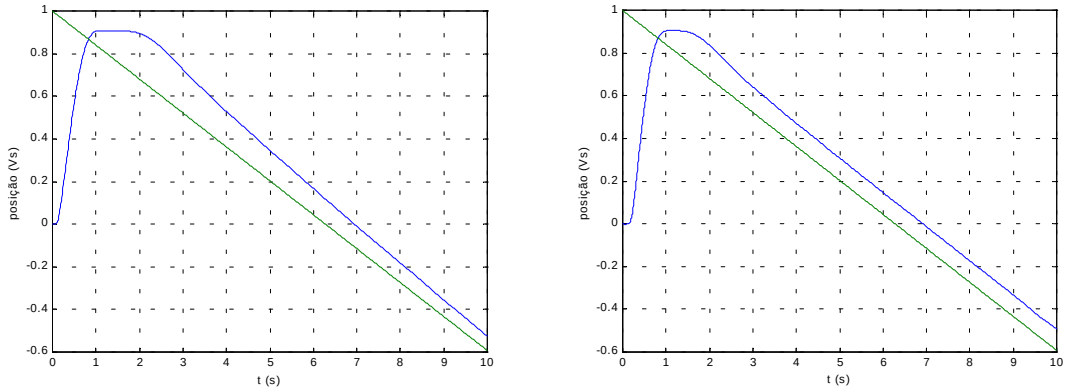

Figura 74 — Saída do sistema nominal (a azul) aquando do seguimento de uma rampa (a verde): à esquerda, resultado obtido com o PID; à direita, resultado obtido com o controlador de ordem não inteira

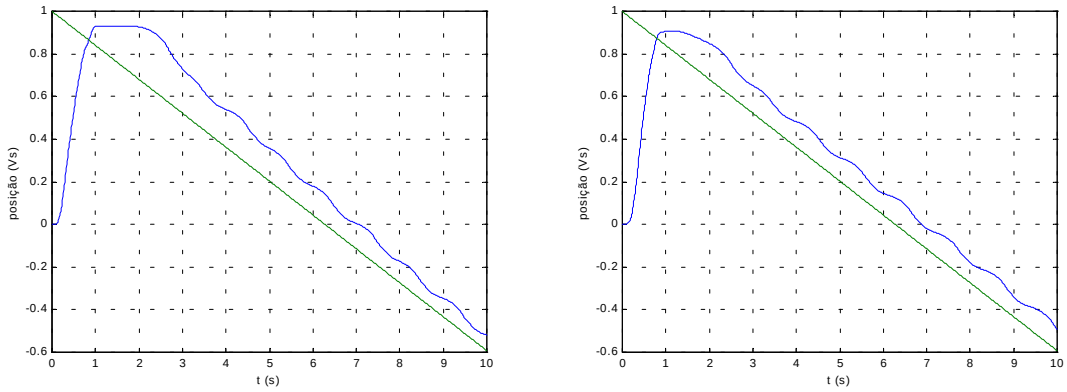

Figura 75 — Saída do sistema modificado (a azul) aquando do seguimento de uma rampa (a verde): à esquerda, resultado obtido com o PID; à direita, resultado obtido com o controlador de ordem não inteira

As acções de controlo aplicadas foram as seguintes.

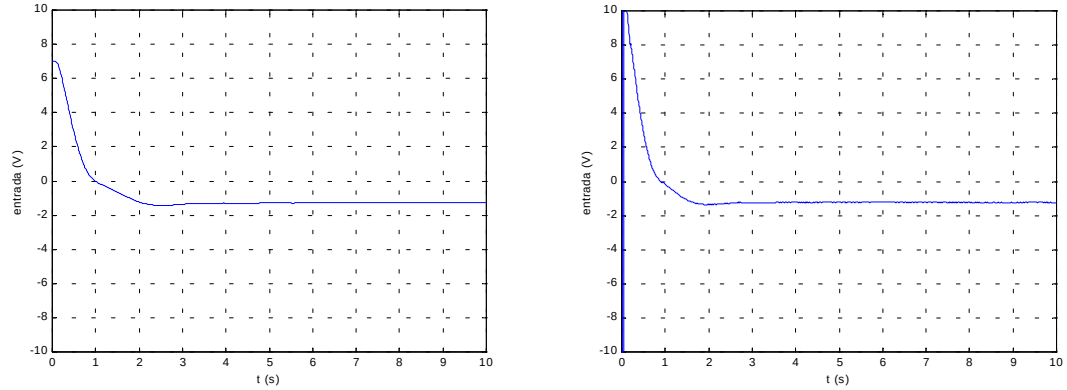

Figura 76 — Acções de controlo correspondentes à Figura 64

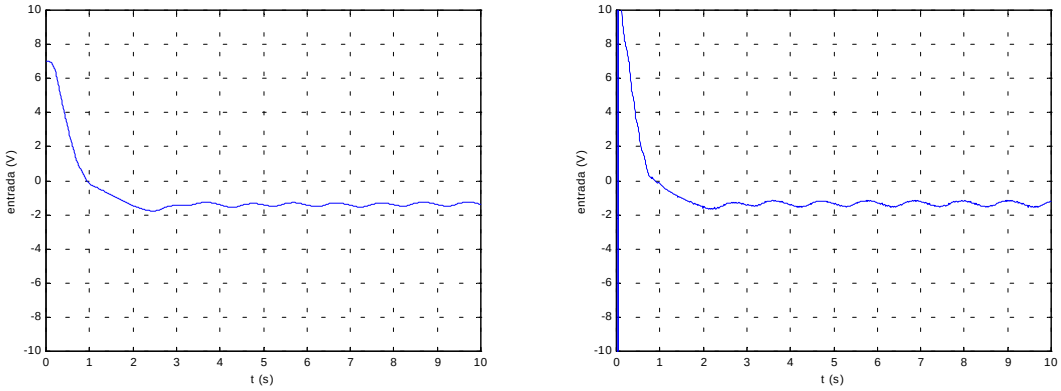

Figura 77 — Acções de controlo correspondentes à Figura 65

É visível que a variação da resposta, durante o regime transiente, é maior no caso do PID que no caso do controlador de ordem não inteira.

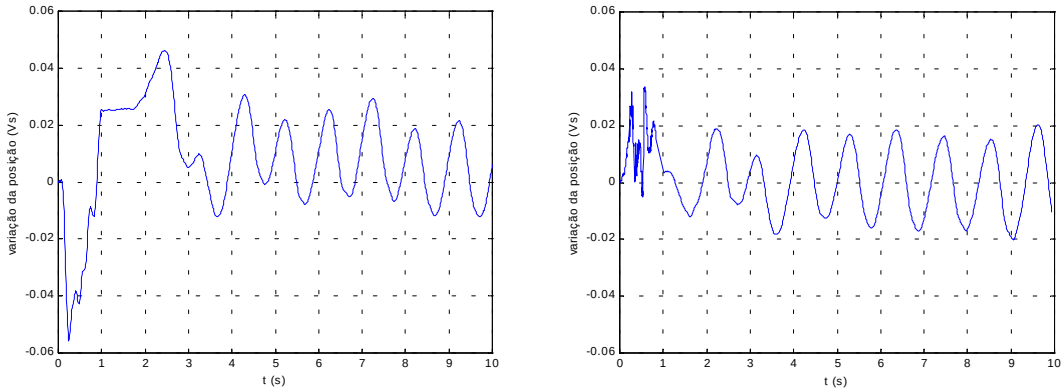

Figura 78 — Variações entre as respostas da Figura 74 e da Figura 75

Ainda assim, o PID tem a vantagem de eliminar, mesmo que lentamente, o erro estacionário na resposta à rampa, como se vê na parte final dos gráficos apresentados. A superioridade do controlador de ordem não inteira diz respeito somente ao regime transiente e não é tão nítida como no caso do controlo de velocidade.

Surge naturalmente a ideia de aproveitar o controlador não inteiro só para o regime transiente e mudar a partir de certa altura para o controlo do PID. Eis os resultados obtidos fazendo essa mudança aos 6 s:

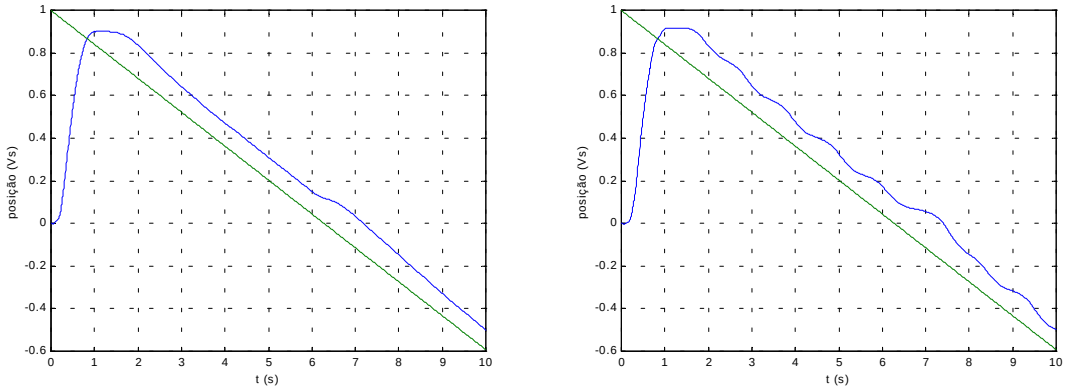

Figura 79 — Saída do sistema (a azul) aquando do seguimento de uma rampa (a verde), comutando entre o controlador de ordem não inteira e o controlador PID: à esquerda, resultado obtido com o sistema nominal; à direita, resultado obtido com o sistema modificado

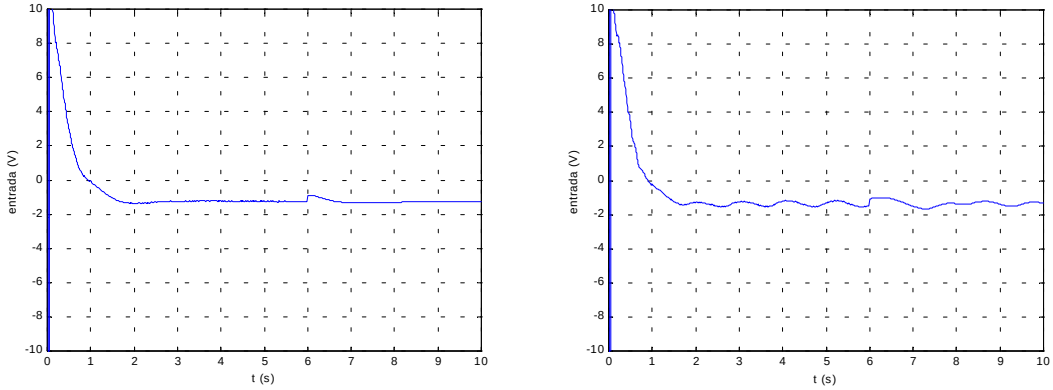

Figura 80 — Acções de controlo correspondentes à Figura 79

Esta mudança de controlador é fácil neste caso porque já se sabe à partida o instante em que convirá fazê-la e porque nesse instante a acção de controlo não tem uma variação significativa. Se alguma das duas condições se não verificasse seria necessário um sistema de supervisão para efectuar a comutação.

Outra hipótese de melhorar o desempenho do controlador de ordem não-inteira aquando do seguimento duma rampa é adicionar-lhe um termo integrativo. Com o controlador

$$C'_{\Theta} = C_{\Theta} + \frac{1,2}{s} \tag{5.48}$$

cujo termo integral foi determinado por tentativa e erro, obtém-se o seguinte resultado:

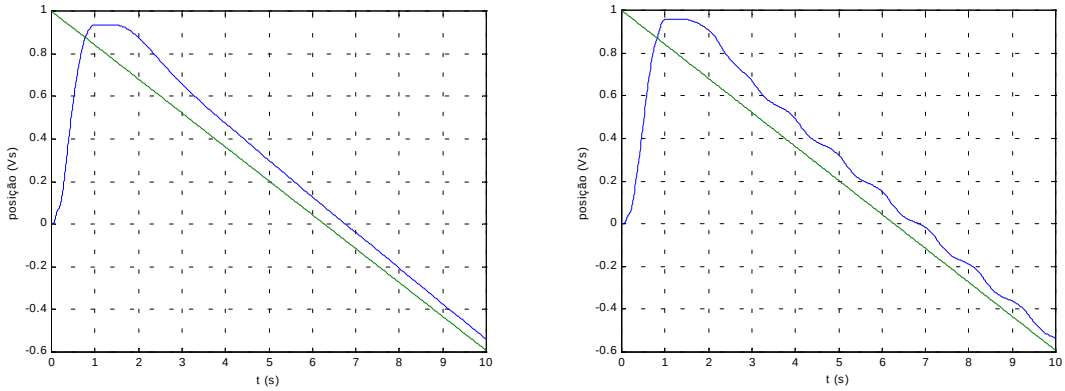

Figura 81 — Saída do sistema (a azul) aquando do seguimento de uma rampa (a verde), com o controlador de ordem não inteira adicionado de um termo integrativo: à esquerda, resultado obtido com o sistema nominal; à direita, resultado obtido com o sistema modificado

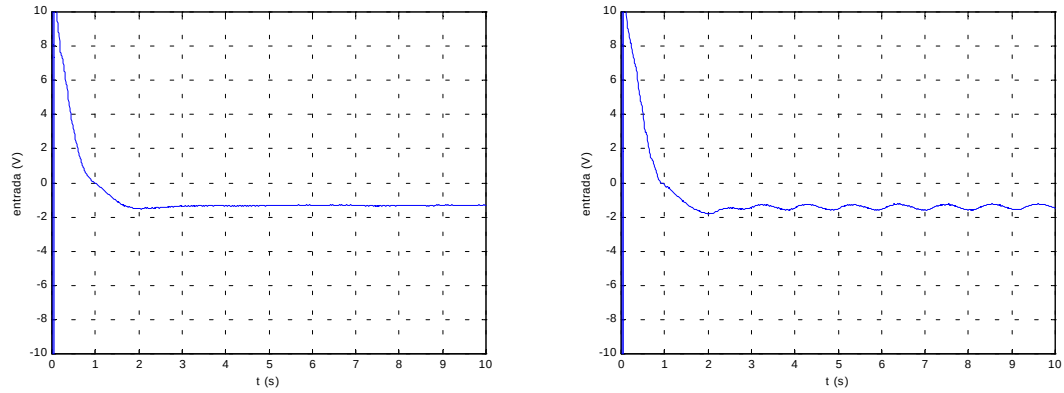

Figura 82 — Acções de controlo correspondentes à Figura 81

Contudo, esta modificação deteriora a resposta ao degrau, aumentando o seu sobreimpulso.

6. Conclusões e trabalho futuro

Este capítulo apresenta na primeira secção algumas conclusões sobre o trabalho realizado e exposto nos capítulos anteriores, e na segunda secção algumas perspectivas de trabalho futuro.

6.1. Conclusões

Do trabalho realizado e exposto nos capítulos anteriores pode extrair-se as seguintes conclusões.

❖ Foi possível implementar em *Matlab* os algoritmos para o desenvolvimento de controladores de ordem não inteira.

❖ A obtenção de controladores com esses algoritmos está sempre dependente da fixação de alguns parâmetros (sejam eles factores recursivos para a colocação de pólos e zeros, ou frequências para amostrar a evolução da fase do sistema). Esses parâmetros permitem chegar a diferentes controladores com diferentes graus de complexidade e diferentes desempenhos. Nem sempre os controladores mais complexos conseguem os melhores desempenhos. Por vezes, pretender um grande número de zeros e pólos pode causar instabilidade numérica nos algoritmos que determinam os controladores, chegando-se a um controlador que não cumpre as especificações de desempenho. Outras vezes, mesmo chegando-se a um controlador que cumpre as especificações, o desempenho não melhora significativamente. Como regra geral um grau intermédio de complexidade é o melhor compromisso. A afinação dos parâmetros requeridos pelos algoritmos tem de ser feita por tentativa e erro, embora haja heurísticas, expostas nas subsecções respectivas, que permitem chegar sem dificuldade a resultados razoáveis.

❖ A ordem dos controladores obtidos é frequentemente superior à ordem do modelo do sistema a controlar. É possível conceber um controlador robusto de ordem inferior, mas o objectivo dos controladores de ordem não inteira é não só a manutenção da estabilidade do anel fechado de controlo mas também a manutenção do grau de estabilidade[93]. Logo, a ordem elevada do controlador é inevitável.

❖ Foi possível aplicar os algoritmos implementados, quer de identificação, quer de controlo, com resultados satisfatórios, a vários sistemas, incluindo um problema paradigmático de controlo constituído por um sistema de transmissão de movimento entre três roldanas por meio de duas correias flexíveis, e uma sua implementação laboratorial. O controlo de ordem não inteira conseguiu sempre resultados melhores ou pelo menos semelhantes aos de um PID e a sua robustez aquando da variação dos parâmetros do sistema a controlar foi sistematicamente melhor.

❖ O controlo de ordem não inteira não é suficiente para garantir determinadas especificações de controlo em certos casos particulares. Nessas situações há que recorrer a controladores formados por uma parte de ordem não inteira e por uma parte convencional.

[93] Oustaloup (1991), pp. 13 e 24.

6.2. TRABALHO FUTURO

O controlo de ordem não inteira é claramente um campo em aberto. Seguidamente listam-se alguns melhoramentos que o decorrer do trabalho realizado sugeriu que podem ser realizados.

❖ A caixa de ferramentas pode ser melhorada, quer do ponto da amigabilidade da interface e da facilidade de implementação, quer do ponto de vista de eficiência dos cálculos (optimizando o tempo de execução os algoritmos), quer do ponto de vista de flexibilidade dos mesmos (permitindo mais opções).

❖ As regras heurísticas para determinação dos parâmetros necessários aos algoritmos que determinam os controladores podem ser mais cuidadosamente estudadas. É decerto possível implementá-las num sistema de controlo recorrendo a lógica difusa. Esse género de sistemas de controlo presta-se particularmente a tarefas de supervisão como esta.

❖ Sempre que um controlador de ordem não inteira incorra num erro estacionário, em vez de incluir controladores PID no anel aberto de controlo, pode tentar-se aplicar apenas o controlador de ordem não inteira durante o regime transiente, e apenas um controlador PID ou outro controlador que não incorra num erro estacionário a partir de certo momento, quando o regime estacionário já estiver praticamente atingido. A comutação entre os dois tipos de controlo deve ser suave para evitar variações bruscas da acção de controlo. Uma vez mais, deve ser possível aplicar supervisão recorrendo a lógica difusa a esta situação.

❖ A aplicação desta metodologia de desenvolvimento de controladores ao caso de sistemas MIMO é um campo por explorar. Decerto que a aplicação é possível, com o mesmo objectivo de conseguir robustez constante face à incerteza do sistema a controlar.

❖ Todo o desenvolvimento de controladores se baseia em modelos contínuos do sistema a controlar. Já foram estudados métodos para efectuar todos os cálculos no domínio discreto, cujos fundamentos foram sumariamente referidos na subsecção 3.3. A implementação dos algoritmos respectivos[94] na caixa de ferramentas é outro desenvolvimento a realizar.

❖ Podem melhorar-se os algoritmos para a síntese de controladores com uma parte de ordem não inteira e uma parte convencional, controladores esses para os quais a caixa de ferramentas tem poucas opções.

[94] Sobre tais algoritmos veja-se Barbosa (1999), pp. 111-146, Machado (1997), Machado *et al.* (1998) e Machado (1999).

BIBLIOGRAFIA

BARBOSA, Ramiro de Sousa — Algoritmos de controlo de ordem não-inteira. Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1999. Tese de mestrado.

BOTTO, Miguel Afonso Dias de Ayala — Controlo de sistemas. Lisboa: AEIST, 1998.

CE108 coupled drives apparatus. Nottingham: TecQuipment Limited, 1992.

COSTA, José Manuel Gutierrez Sá da — Modelação e identificação de sistemas. Lisboa: AEIST, 1987.

GORENFLO, Rudolf; MAINARDI, Francesco — Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order. In CARPINTERI, A.; MAINARDI, Francesco, eds. — Fractals and fractional calculus in continuum mechanics. Wien: Springer Verlag, 1997. p. 223-276.

HILDEBRAND, Francis Begnaud — Advanced calculus for applications. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1976.

KWAKERNAAK, Huibert — Symmetries in control system design. In ISIDORI, A., ed. — Trends in control: a European perspective. New York: Springer-Verlag, 1995. p. 17-51.

LANDAU, I. D. — Competition, interaction, control. In BASTIN, G.; GEVERS, M., eds. — Plenary lectures and mini-courses. Louvain-la-Neuve: European Control Conference, 1997. p. 1-35.

LANDAU, I. D.; REY, D.; KARIMI, A.; VODA, A.; FRANCO, A. — A flexible transmission system as a benchmark for robust digital control. European Journal of Control. 1 (1995) 77-96.

MACHADO, J. A. Tenreiro — Analysis and design of fractional-order digital control systems. Journal of systems analysis, modeling and simulation. 27 (1997) 107-122.

MACHADO, J. A. Tenreiro; AZENHA, Abílio — Fractional-order hybrid control of robot manipulators. In 1998 IEEE international conference on systems, man and cybernetics: intelligent systems for humans in a cyberworld. [S.l.]: IEEE, 1998. p. 788-793.

MACHADO, J. A. Tenreiro — On the implementation of fractional-order control systems through discrete-time algorithms. In Bánki Donát Polytechnic műszaki főiskola: jubilee international conference proceedings. Bánki Donát: Bánki Donát Polytechnic, 1999. p. 39-44.

MAGALHÃES, Luís T. — Integrais múltiplos. Lisboa: Texto Editora, 1993.

MANDELBROT, Benoit B. — The fractal geometry of nature. 2ª ed. New York: W. H. Freeman and Company, 1983.

MILLER, Kenneth S.; ROSS, Bertram — An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. New York: John Wiley and Sons, 1993.

OGATA, Katsuhiko — Modern control engineering. 3ª ed. London: Prentice Hall International, 1997.

OUSTALOUP, Alain — La commande CRONE: commande robuste d'ordre non entier. Paris: Hermès, 1991.

OUSTALOUP, Alain; MATHIEU, B.; LANUSSE, P. — The CRONE control of resonant plants: application to a flexible transmission. European Journal of Control. 1 (1995) 113-121.

PODLUBNY, Igor — Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. San Diego: Academic Press, 1999.

SAMKO, Stefan G.; KILBAS, Anatoly A.; MARICHEV, Oleg I. — Fractional integrals and derivatives: theory and applications. Yverdon: Gordon and Breach Science Publishers, 1993. Tradução revista e ampliada de: Интегралы и производые дробного порядка и некоторые их прилжения.

TUNES, Rui Jorge Fontinha — Controladores de ordem fraccionária. Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1997. Tese de mestrado.

APÊNDICE A. PROPRIEDADES DALGUMAS FUNÇÕES TRANSCENDENTAIS

Neste apêndice sumarizam-se as propriedades dalgumas funções necessárias à generalização do cálculo diferencial e integral a uma ordem não inteira.

A.1. A FUNÇÃO Γ

Para x positivo, a função Γ (função gama) define-se por[95]

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} e^{-y}y^{x-1}dy \tag{A.1}$$

Tem-se que

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-y}dy=\left[-e^{-y}\right]_0^{+\infty}=0-(-1)=1 \tag{A.2}$$

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty} e^{-y}y^{x}dy=\left[-e^{-y}y^{x}\right]_{y=0}^{y=+\infty}-\int_0^{+\infty}-e^{-y}xy^{x-1}dy=$$

$$=-0+0+x\int_0^{+\infty} e^{-y}y^{x-1}dy=x\Gamma(x) \tag{A.3}$$

Estas duas propriedades fazem com que

$$\Gamma(n+1)=n!,\ n\in\mathbb{N} \tag{A.4}$$

A segunda propriedade usa-se para definir recursivamente a função Γ para $x\in\mathbb{R}^{-}\setminus\mathbb{Z}$:

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\ldots(x+n-1)} \tag{A.5}$$

A função não pode definir-se por continuidade para $x\in\mathbb{Z}_0^{-}$ visto que a expressão anterior mostra que a função tende para infinito nesses pontos.

Também se conclui que

$$\Gamma(x)\Gamma(-x+1)=\frac{\Gamma(x+1)}{x}\left[-x\Gamma(-x)\right]=-\Gamma(-x)\Gamma(x+1) \tag{A.6}$$

Aplicando repetidas vezes esta igualdade chega-se a

$$\Gamma(x)\Gamma(-x+1)=(-1)^n\Gamma(-x-n+1)\Gamma(x+n) \tag{A.7}$$

[95] Hildebrand (1976), p. 245.

A função gama permite definir combinações do seguinte modo:

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)} \tag{A.8}$$

Esta expressão é válida para $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$.

A.2. A FUNÇÃO γ^*

Para *x* positivo, a função γ^* (função gama incompleta) define-se por[96]

$$\gamma^*(x,z) = \int_0^z e^{-y} y^{x-1} dy \tag{A.9}$$

Claramente, $\Gamma(x) = \lim_{z \to +\infty} \gamma^*(x,z)$.

A.3. A FUNÇÃO E_t

Define-se a função E_t (função de Mittag-Leffler) como[97]

$$E_t(\nu, a) = \frac{e^{at}}{\Gamma(v) a^v} \gamma^*(v, at) \tag{A.10}$$

Esta função surge ao calcular

$${}_cD_t^{-v} e^{at} = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_c^t (t-\xi)^{v-1} e^{a\xi} d\xi, \; v \in \mathbb{R}^+ \tag{A.11}$$

Operando a substituição $x = t - \xi$, primeiro, e a substituição $ax = y$, depois, vem

$$\begin{aligned} {}_cD_t^{-v} e^{at} &= \frac{e^{at}}{\Gamma(v)} \int_c^t x^{v-1} e^{-ax} dx = \frac{e^{at}}{\Gamma(v)} \int_{ac}^{at} e^{-y} \left(\frac{y}{a}\right)^{v-1} \frac{dy}{a} = \\ &= \frac{e^{at}}{\Gamma(v) a^v} \left(\int_0^{at} e^{-y} y^{v-1} dy - \int_0^{ac} e^{-y} y^{v-1} dy \right) = \frac{e^{at}}{\Gamma(v) a^v} \left[\gamma^*(v, at) - \gamma^*(v, ac) \right] \end{aligned} \tag{A.12}$$

Do atrás exposto resulta que

---

[96] Segue-se a definição usual, que pode encontrar-se por exemplo em Hildebrand (1976), p. 675. Miller *et al.* (1993), p. 300, multiplica o integral por outros termos para facilitar a definição de E_t. Optou-se pela definição que mais facilmente relaciona γ^* e Γ.

[97] Aqui segue-se a definição de Miller *et al.* (1993), p. 48, adaptada para corresponder à definição de γ^* seguida na subsecção anterior. Samko *et al.* (1993), p. 21, segue uma definição mais afastada do cálculo integral, e que não é equivalente a esta.

$$ {}_0D_t^{-v} e^{at} = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^t (t-\xi)^{v-1} e^{a\xi} d\xi = E_t(v,a), \ v \in \mathbb{R}^+ \tag{A.13} $$

e assim, aplicando o teorema da convolução[98],

$$ \mathscr{L}\left[E_t(v,a) \right] = \frac{1}{\Gamma(v)} \mathscr{L}\left[t^{v-1} \right] \mathscr{L}\left[e^{at} \right] = \frac{1}{s^v (s-a)} \tag{A.14} $$

[98] Ogata (1997), p.33.

APÊNDICE B. EXEMPLO DUM FENÓMENO FÍSICO

Neste apêndice apresenta-se um sistema físico que se pode modelar recorrendo ao cálculo de ordem não inteira[99].

B.1. MODELAÇÃO

Considere-se um dique que exerce uma força F numa massa m de água que se desloca com uma velocidade a.

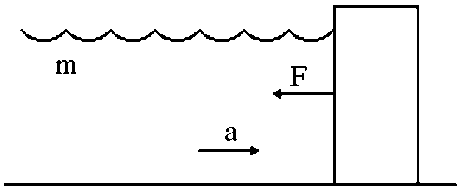

Figura 83 — Dique

Considere-se que a parede do dique tem inúmeros alvéolos onde o ar se aloja, o que sucederá se for construído de alvenaria sem argamassa. Seja P a pressão à entrada de cada um dos alvéolos, P_i a pressão no interior do i-ésimo alvéolo, e Q_i o caudal de água que atravessa esse alvéolo.

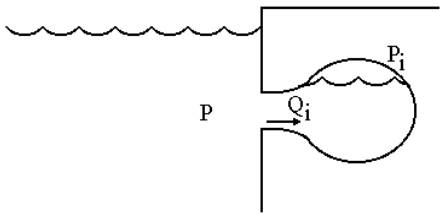

Figura 84 — Alvéolo na parede do dique

Visto que em cada alvéolo existe uma perda de carga e uma capacidade, pode-se modelar o alvéolo electricamente como

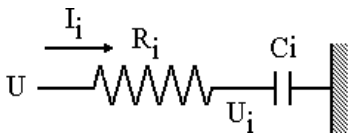

Figura 85 — Modelo eléctrico do alvéolo

sendo $U = P$, $U_i = P_i$, $I_i = Q_i$. Repare-se que a lei de conservação da massa faz com que $Q = \sum_i Q_i$, o que corresponde ao resultado da lei de conservação da carga eléctrica $I = \sum_i I_i$.

[99] Este apêndice segue de perto Oustaloup (1991), pp. 63 e ss..

B.2. DIAGRAMA DE BODE

Se só houvesse um alvéolo,

$$\frac{I}{U} = \frac{Cs}{1 + RCs} \tag{B.1}$$

Havendo dois,

$$\frac{I}{U} = \frac{C_1 s}{1 + R_1 C_1 s} + \frac{C_2 s}{1 + R_2 C_2 s} = \frac{C_1 s\left(1 + R_2 C_2 s\right) + C_2 s\left(1 + R_1 C_1 s\right)}{\left(1 + R_1 C_1 s\right)\left(1 + R_2 C_2 s\right)} =$$
$$= \frac{C_1 s + R_2 C_2 C_1 s^2 + C_2 s + R_1 C_1 C_2 s^2}{1 + R_2 C_2 s + R_1 C_1 s + R_1 C_1 R_2 C_2 s^2} = \frac{\left[\left(C_1 + C_2\right) + \left(R_2 C_2 C_1 + R_1 C_1 C_2\right)s\right]s}{\left(1 + R_1 C_1 s\right)\left(1 + R_2 C_2 s\right)} \tag{B.2}$$

O diagrama de Bode correspondente será[100]

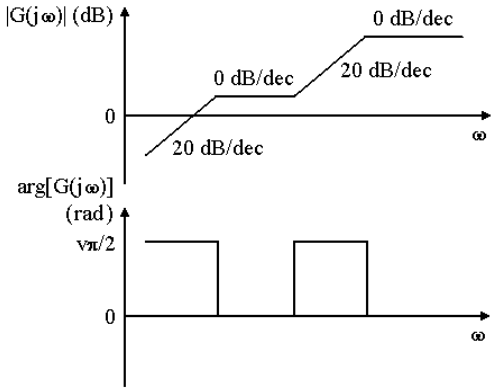

Figura 86 — Diagrama de Bode da função de transferência de *Q*/*P* havendo dois alvéolos

Continuando a adicionar mais circuitos RC série em paralelo aos anteriores, o diagrama de Bode da fase tornar-se-á uma alternância de zonas com declive de 20 dB/dec e de zonas com declive nulo. Quanto ao diagrama de Bode da fase, alternará entre $\pi/2$ rad e 0 rad. Se o número de alvéolos tender para infinito[101], os efeitos dos zeros e dos pólos sobrepor-se-ão, e numa certa zona de frequências ter-se-á um diagrama de ganho rectilíneo, com um declive entre 0 dB/dec e 20 dB/dec, e um diagrama de fase horizontal, com uma fase constante entre $\pi/2$ rad e 0 rad.

[100] Para que o diagrama se assemelhe ao representado, é preciso que, ao colocar por ordem as frequências de corte dos termos da fracção, surjam alternadamente frequências de corte do numerador e do denominador. Pode mostrar-se que, sendo a porosidade um fenómeno fractal (Mandelbrot, 1983), é isso que sucede.

[101] Dada a fractalidade da porosidade, é isso que sucede, havendo alvéolos de todos os tamanhos, pelo menos numa certa gama de dimensões.

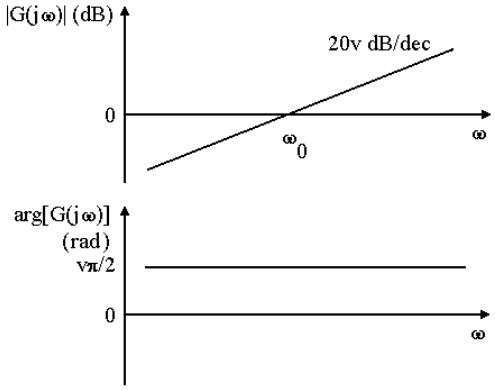

Figura 87 — Diagrama de Bode da função de transferência de *Q*/*P* havendo um número infinito de alvéolos

Este diagrama corresponde a uma função de transferência da forma[102]

$$\frac{Q}{P}=\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^{v},\quad v\in\left]0;1\right[\tag{B.3}$$

onde ω_0 é a frequência correspondente ao ganho unitário. No domínio do tempo ter-se-á

$$Q(t)=\frac{1}{\omega_0^{v}}{}_0D_t^{v}P(t) \tag{B.4}$$

B.3. RESULTADO FINAL

Sendo constante a massa de água *m* que exerce pressão sobre o dique, a primeira lei de Newton afirma que

$$F=-m\frac{da}{dt} \tag{B.5}$$

onde *a*, recorde-se, é a velocidade com que a massa de água se desloca. O sinal do segundo membro resulta de *F* e *a* terem sentidos opostos. Seja *S* a área sobre a qual a massa de água actua. Então a equação anterior equivale a

$$PS=-m\frac{d}{dt}\frac{Q}{S}\Leftrightarrow P+\frac{m}{S^2}\frac{dQ}{dt}=0\Leftrightarrow P+\frac{m}{\omega_0^{v}S^2}{}_0D_t^{1+v}P=0 \tag{B.6}$$

Fazendo $1+v=n\in\left]1;2\right[$ e $\omega_1=\sqrt[n]{\frac{\omega_0^{v}S^2}{m}}$, vem

[102] Mostra-se que *v* é o mesmo, seja ele calculado a partir do diagrama de ganho, seja ele calculado a partir do diagrama de fase.

$$P(t)+\frac{1}{\omega_1^n}{}_0D_t^nP(t)=0 \tag{B.7}$$

A transformada de Laplace desta equação é

$$P(s)+\left(\frac{s}{\omega_1}\right)^n P(s)=0 \Leftrightarrow P(s)=-\left(\frac{\omega_1}{s}\right)^n P(s) \tag{B.8}$$

que corresponde ao seguinte diagrama de blocos, semelhante ao da Figura 8:

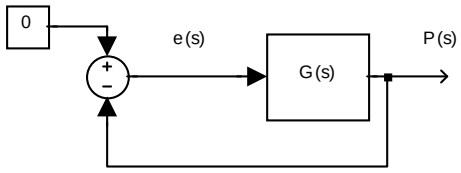

Figura 88 — Diagrama de blocos equivalente ao modelo do dique

onde $G(s)=\left(\frac{\omega_1}{s}\right)^n$.

Cabe aqui fazer ainda alguns comentários que pressupõem o conhecimento das subsecções 3.1.1 e 3.1.2. Note-se que se *m* ou *S* variarem, isso traduzir-se-á numa variação da frequência de cruzamento de ganho ω_1, mantendo-se a margem de fase, como se viu na secção 3.1.1. Além disso, em anel fechado, o amortecimento do sistema não variará, variando apenas a sua frequência amortecida, como se viu na subsecção 3.1.2.1.

APÊNDICE C. LISTA DOS FICHEIROS DA CAIXA DE FERRAMENTAS

C.1. FICHEIROS DA INTERFACE GRÁFICA

alfaoptc.m
alfaopto.m
igu0.m
igu1.m
igu10.m
igu100.m
igu101.m
igu103.m
igu104.m
igu11.m
igu11d.m
igu11d.mat
igu12.m
igu12d.m
igu12d.mat
igu13.m
igu14.m
igu15.m
igu16.m
igu17.m
igu18.m
igu19.m
igu1d.m
igu1d.mat
igu2.m
igu20.m
igu21.m
igu22.m
igu2d.m
igu2d.mat
igu3.m
igu3d.m
igu3d.mat
igu4.m
igu41.m
igu41d.m
igu41d.mat
igu42.m
igu42d.m
igu42d.mat
igu43.m
igu43d.m
igu43d.mat
igu75.m
igu75d.m
igu75d.mat
igu76.m
igu76d.m
igu76d.mat
igu77.m
igu77d.m
igu77d.mat
igu78.m
igu79.m
igu44.m
igu45.m
igu46.m
igu47.m
igu48.m
igu49.m
igu4d.m
igu4d.mat
igu5.m
igu50.m
igu51.m
igu52.m
igu6.m
igu71.m
igu71d.m
igu71d.mat
igu72.m
igu72d.m
igu72d.mat
igu73a.m
igu73b.m
igu73d.m
igu73d.mat
igu74.m
igu74d.m
igu74d.mat
igu7a.m
igu7b.m
igu7c.m
igu8.m
igu80.m
igu81.m
igu82.m
igu83.m
igu85.m
igu88.m
igu89.m
igu9.m
igu90.m
igu91.m
igu92.m
igu93.m
igu94.m
igu95.m
igu96.m
igu97.m
igu98.m
igu99.m
ninteiro.m
ninteiro.mat

C.2. FUNÇÕES FUNDAMENTAIS

calcdesempenho.m
cnifc.m
cnifcae.m
cnifcr.m
cnifcvaeo.m
cnifcvo.m
cnifol.m
cnifolae.m
cnifv.m
cnifvo.m
erroFase.m
erro2Fase.m
erroInclina.m
erro2Inclina.m
identfv.m
inclopt.m
paramopt.m
prec.m
resolucao.m
verifcnifo.m
verifcnifv.m